連載

フィルタ回路の設計ノート

第4回
チェビシェフ・フィルタの設計と1次IIRフィルタの乗数算出法

佐々木　淑恵

5　今回は，チェビシェフ特性のローパス・フィルタとハイパス・フィルタをとりあげ，バターワース特性フィルタとの違いや特徴をまとめてみたいと思います．また，ディジタル・フィルタについては，いままで，説明していなかった1次IIR型のローパス・フィルタとハイパス・フィルタについて乗数の算出方法を説明します．

1.はじめに

チェビシェフ特性のフィルタは，通過域の減衰特性が波状となり，阻止域の特性が単調に変化します．通過域にリプルをもたせることにより，減衰特性を急峻にすることができます．

減衰量が通過域端減衰量（リプルともいう）を超える周波数を通過域端周波数といい，この周波数よりも低い周波数を通すフィルタをローパス・フィルタ，高い周波数を通すフィルタをハイパス・フィルタといいます．また，阻止域端周波数での減衰量を阻止域端減衰量といいます．各フィルタの周波数特性は，**図1**に示すとおりです．

2.チェビシェフ特性のローパス・フィルタ

まず，次のような特性のフィルタを設計してみます．

バターワース特性と比較しやすいように，リプルは3dBで設計してみます．

例題1

通過域端周波数（f_0）	1000Hz
阻止域端周波数（f_s）	2000Hz
通過域端減衰量（α_{min}）	3dB
阻止域端周波数（α_{max}）	20dB

のチェビシェフ特性ローパス・フィルタを設計する．回路の入力信号に対する出力信号の利得は0dB，信号は反転するようにする（参考文献5の例題2と同じ）．

まず，**公式1**により回路の次数を求めます．

公式1　**チェビシェフ型ローパス・フィルタの次数**

$$N=\frac{\cosh^{-1}\left[\left(10^{\alpha max/10}-1\right)/\left(10^{\alpha min/10}-1\right)\right]^{1/2}}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_0}\right)}$$

ただし

通過域端周波数：f_0（Hz）　$\omega_0=2\pi f_0$

阻止域端周波数：f_s（Hz）　$\omega_s=2\pi f_s$

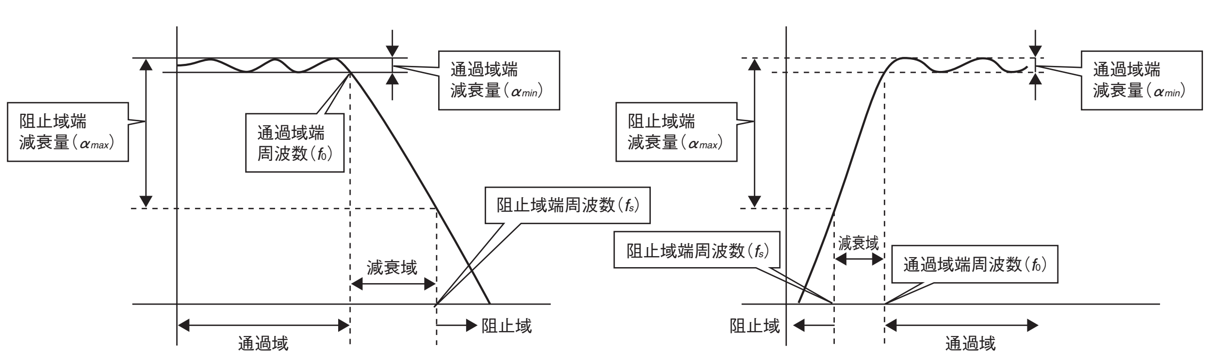
通過域端減衰量：α_{min}（dB）

阻止域端減衰量：α_{max}（dB）

ここで

$$\cosh^{-1}N_x=\ln\left(N_x+\sqrt{N_x{}^2+1}\right)$$

ただしlnはeを底とする対数



(a) チェビシェフ特性ローパス・フィルタ　(b) チェビシェフ特性ハイパス・フィルタ

〔図1〕周波数特性

$$N_x=\left[\left(10^{\alpha\, max/10}-1\right)/\left(10^{\alpha\, min/10}-1\right)\right]^{1/2}$$

とすると,

$$N=\frac{\ln\left(N_x+\sqrt{N_x{}^2-1}\right)}{\ln\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}+\sqrt{\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^2-1}\right)}$$

と書き換えることができます.

$$\begin{aligned}N_x&=\left[(10^{\alpha min/10}-1)/(10^{\alpha min/10}-1)\right]^{1/2}\\&=\left[(10^{20/10}-1)/(10^{3/10}-1)\right]^{1/2}\\&=9.97\end{aligned}$$

$$N=\frac{\ln\left(9.97+\sqrt{9.97^2-1}\right)}{\ln(2+\sqrt{2^2-1})}=2.265$$

切り上げるとNは3ですから，3次のフィルタであることがわかります.

次に，**公式2**より，$N=3$のときの伝達関数を求めます.

公式2 **チェビシェフ特性の伝達関数**

Nが奇数のとき

$$H(s)=\frac{H}{\left(s+a_0\right)\prod_{n=1}^{(N-1)/2}\left(s^2+b_{2n}s+c_{2n}\right)}$$

Nが偶数のとき

$$H(s)=\frac{H}{\prod_{n=1}^{N/2}\left(s^2+b_{2n-1}s+c_{2n-1}\right)}$$

チェビシェフ特性の場合は,

$$\begin{cases}a_0=\sinh\theta\\ b_m=2\ \ a_0\ \ \cos\left(\frac{m\pi}{2N}\right)\\ c_m=a_0^2+\Omega_m^2\end{cases}$$

$$\theta=\frac{\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10^{\alpha\, min/10}-1}}\right)}{N}$$

$$\Omega_m=\sin\left(\frac{m\pi}{2N}\right)$$

$$\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

ここで

$$x=\frac{1}{\sqrt{10^{\alpha\, min/10}-1}}$$

とすると,

$$\theta=\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{N}$$

と書き換えることができます.

$$H(s)=\frac{H\omega_0^2}{(s+a_0)(s^2+b_2s+c_2)}$$

となります．ここで,

$$x=\frac{1}{\left(10^{\alpha min/10}-1\right)^{1/2}}=1.001$$

とすると,

$$\theta=\frac{\sinh^{-1}x}{N}$$

$$\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

なので,

$$\theta=\frac{\ln(1.001+\sqrt{1.001^2+1})}{3}=0.293$$

となります．また,

$$a_0=\sinh\theta=\sinh(0.293)=0.298$$

$$b_2=2\ \ a_0\ \ \cos\left(\frac{2\pi}{2\cdot3}\right)=0.298$$

$$\Omega_2=\sin\left(\frac{2\pi}{2\cdot3}\right)=0.866$$

$$c_2=b_2^2+\Omega_2^2=0.839$$

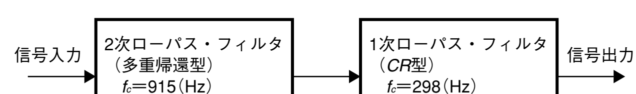
なので,

$$H(s)=\frac{1}{(s+0.298)}\cdot\frac{\omega_0^2}{(s^2+0.298s+0.839)}$$

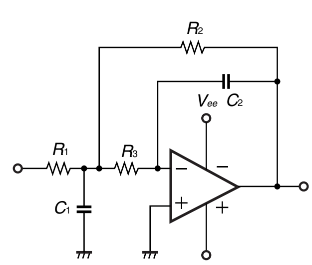
となります.

この伝達関数から，1次のフィルタと2次のフィルタの組み合わせで構成できることがわかります．また，各フィルタの特性は次のようにして求めます.

まず，2次のフィルタのQは,



〔図2〕チェビシェフ特性ローパス・フィルタの構成（例題1）



(a) 回路図

$R_1=R_3=R$ …（Ω）

$R_2=HR$

とすると

$C_1=\frac{Q}{\omega_0}\cdot\frac{2H+1}{HR}$ …（F）

$C_2=\frac{1}{\omega_0{}^2}\cdot\frac{1}{HR^2C_1}$ …（F）

H：増幅率

ω_0：$2\pi f_o$ （f_oは通過域端周波数）

(b) 素子値の求め方

〔図3〕多重帰還型ローパス・フィルタ回路