

フィルタの伝達関数を理解しよう



谷口研二

人間の脳は自分につごうの良い情報を選択して記憶するフィルタ機能を持っているそうです。そういえば、過去の辛く悲しい時代を振り返っても当時の苦しかったことはほとんど忘れ去っており、楽しかったことだけが頭の中に残っています。つまり、脳の中には人間が生き延びるための巧妙な「からくり」がしくまれているのです。このため、わたしたちが経験してきた無数の情報の中からいやしの情報だけが「ふるい(フィルタ)」にかけられて脳裏に焼き付けられるのです。もし、フィルタの働きが狂うと、生存につごうの悪い情報も同じように脳裏に残り、生きていくことがとても辛くなってしまいます。アナログ信号の処理には、このような脳の働きに似たフィルタ機能が数多く使われています。例えば、無数の電波の中から所望の放送局を選び出す同調回路や電源ノイズを除去するノッチ・フィルタ、低・中・高域を受け持つ3種類のスピーカのそれぞれにアナログ信号を振り分ける帯域分離フィルタなどが電気製品の中で使用されています。しかし、まちがった特性のフィルタでアナログ音声信号を処理すると、浜崎あゆみの歌声がドラえもんの声になるかもしれません。また、アナログ画像データの処理をまちがえると、彼女の顔がムンクの描いた「叫び」のようなデフォルメした顔になったりします。このようにアナログ信号の処理はフィルタにしこんだ「からくり」で決まります。

今回はフィルタの「からくり」が何によって決定されているのかについて解説します。まず信号を伝える伝送経路の伝達関数の物理的な意味、そして伝達関数の「極」と「零点」の働きについて理解を深めていただき、続いてフィルタの周波数応答について説明します。途中、やや数学的な取り

扱いはあり、式の変形などに気が散りそうになりますが、がんばってついてきてください。今回のテーマである伝達関数は、すべての電子回路の中でもとても重要な概念ですが、その物理的なイメージについてはあいまいなままの設計者が多いようです。本稿を読んで、伝達関数の意味が頭の中でイメージできるように設計者に变身されることを期待しています。

フィルタの種類と歴史

フィルタにはさまざまな種類があります。大別すると、図1に示すようにアナログ・フィルタとデジタル・フィルタに分けられます。アナログ・フィルタの歴史はとても古く、1920年ころに登場しました。その後、50年間はインダクタとキャパシタを使用したLCフィルタが主流でした。その後、OPアンプが集積回路の上に作製され、1970年ころからはアナログ回路にとってやっかい者だったインダクタのないアクティブ・フィルタが全盛となりました。さらに1980年代に入ってから、キャパシタとMOSスイッチだけを用いたスイッチト・キャパシタ回路によるオンチップ・フィルタが現れました。

この技術の発展の裏には、MOS型集積回路の急速な進歩があります。ディーブ・サブミクロンのチャンネル長を持つ微小なMOS素子がこの技術を支えていると言っても過言ではありません。このスイッチト・キャパシタ回路の出現により、フィルタとほかの回路ブロックとの混載が可能となり、高度で精度の高いデータ処理を行えるようになりました。もちろん、それ以外にも、アナログ信号をA-Dコンバータでデジタル・データに変換した後、それをデジタル・データのままフィルタ処理するデジタル信号処

理も、画像、音声、通信などの分野で使われています。

伝達関数の物理的なイメージを理解する

フィルタに関する教科書を読んでいると、伝達関数の「線形性・時不変性」や「極」、「零点」といった難しい語句がひんぱんに出てきます。そもそも伝達関数とはいったい何なのでしょう。

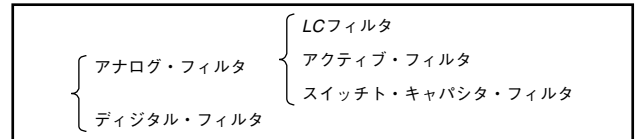
●音の伝わりかた — インパルス応答

筆者が学生時代に下宿していた長屋では、隣の部屋の夫婦がよくけんかをしていました。どなり声や茶わんを投げつける音、人が倒れこむ音などが壁や天井、床下を伝って聞こえてきました。上の階の部屋からは人の足音などの低い周波数の物音だけが聞こえてくるのに、隣の部屋からは人の声がよく伝わってきました。

このように音の伝わりかたは伝達媒体(天井や壁)の種類によって違ってきます。どのような周波数の音が伝わりやすいかは、伝達媒体をかなづちでコンと叩くだけですぐにわかることをご存じでしょうか。これをインパルス応答と呼びます。例えば、ベニヤ板などで作られた薄い壁板は壁のしなりぐあいに応じた共振を起こすので、壁板をコンと叩くと共振周波数の振動が持続しながら、しだいに減衰していきます。一方、厚い土塀だと共振周波数が可聴音域にないため、コンと叩いてもすぐに減衰して壁の向こう側にはほとんど何も伝わりません。つまり、かなづちで壁を叩いた(インパルス)後の応答は次式で表現できます。

$$f(t) = A \exp(pt): p = \sigma + j\eta \quad (1)$$

ここで、複素数 p は壁固有の性質を反映した定数で、壁ごとにそれぞれ違ったものです。実数部 σ が正ならばインパルス応答は時間の経過とともにしだいに大きくなり、負ならば減衰していくことを意味しています。振動の振幅がしだいに大きくなる($\sigma > 0$)には、エネルギーが連続して供給されなければなりません。壁の例では一度きりの衝撃しか加えていないので、 σ は負の値となります。また、虚数部 η が大きいと高い共振周波数の壁を意味し、逆にゼロに近い小さな値だと低い共振周波数の壁であることがわかります。ちなみに $\eta = 0$ は振動せずに、単に減衰もしくは増大していく波を表しています。 A は衝撃の強さに比例する定数です。



〔図1〕フィルタの分類

アナログ・フィルタとデジタル・フィルタに大別できる。

長屋で使われる壁はベニヤ板1枚でできているのではなく、さまざまな壁材を組み合わせられて作られています。そうになると壁のインパルス応答は1種類の振動様式 p を持った波だけではなく、さまざまな振動が混ざり合ったものともみなすことができます。例えば、すじかい(筋交い)に使った角材の太さが異なればもちろんインパルス応答は違ってきます。つまり、さまざまな p_i の値が混ざり合った壁のインパルス応答は次式で与えられます。

$$f(t) = \sum_i A_i \exp(p_i t) \quad (2)$$

より正確には初期条件を組み込んだ表現にしなければなりません。ここでは振動様式の特徴を議論しているので、初期条件の影響はとりあえず無視します。

●振動様式パラメータの決めかた — ラプラス変換

さて、式(2)の中でとても重要な役割を担う振動様式パラメータ p_i は、どのように決められるのでしょうか。

わたしたちは、柔らかいベニヤ板や重い壁の共振振動数が低いことを経験的に知っています。しかし正確な振動状況を知るには、壁材の剛性率、大きさ、重さなどをパラメータとした微積分方程式を解かなくてはなりません。

ここで、昔勉強した微分方程式の解法を思い出すこととなります。数学の授業で学んだ難しい微分方程式の中に、簡単に解ける微積分方程式もあることをご存じですか？壁の例では、ベニヤ板の剛性率、大きさ、重さなどは時間が経過しても変わりません。これを「時不変」と呼びます。また、かなづちでコンと叩くときの衝撃の強さと振動の大きさが比例するという「線形性」の仮定を導入すると、壁の振動を表す微積分方程式は、演算子を使って簡単に解くことができるのです。これがラプラス変換です。

ラプラス変換の定義は教科書にくどくどと書かれていますが、要は微分記号を s 、積分記号を $1/s$ で表す表記法(演算子法)です。このような演算子を用いると、壁の物理的な振動を記述する微積分方程式は s の多項式で表現されます。