

# エンジニアの素朴なギモン

## 第6回 パルスはまき散らす

小暮裕明

パルス (Pulse) は「脈拍」の意味である。「パルス性のノイズ」というときのパルスは、「継続時間の短い電圧または電流」のことになる。Wireless USBなどの無線はUWB (Ultra Wideband) の技術を採用している。これはパルス波形をアンテナから直接放射する方式であるため、3GHz～10GHzまでの電波が発生する。今回はなぜこれほどの広帯域を占めるのか、そのメカニズムを探る。(筆者)

### ● 乱形波はsin波の合成

新人：ひとくちに「パルス波」といっても、図1のように、矩形波、台形波、三角波など、いろいろあります。

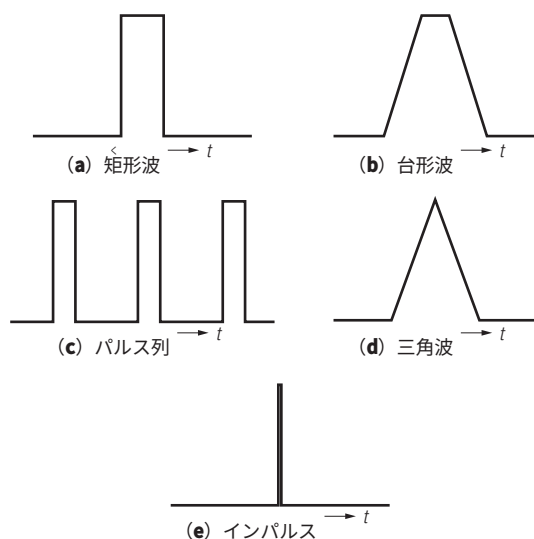


図1 パルス波の種類  
主なものを示す。

先輩：連続パルスを考えてみよう。複雑なひずみ波 (乱形波) は、一定の周期で波形が繰り返される場合、ある周波数の整数倍の関係にある多数のsin波の和として表すことができる。

フーリエ級数 (Fourier Series) です

その通り。いま連続パルスを考えて、それが次の式で表されるとしよう。

$$y = b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(n\theta + \varphi_n) \quad \dots\dots\dots (1)$$

三角関数の公式を用いると、

$$\begin{aligned} C_n \cos \varphi_n &= a_n, \\ C_n \sin \varphi_n &= b_n \end{aligned}$$

と置いて、

$$y = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、

$$\begin{aligned} C_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \tan \varphi_n &= \frac{b_n}{a_n} \end{aligned}$$

となる。

ここでyは連続パルスですから、多数の正弦波の和として表すことができました。b<sub>0</sub>、b<sub>n</sub>、a<sub>n</sub>の値が分かればよいのです。

教科書によれば、b<sub>0</sub>は式(2)の両辺にdθを乗じ、0から2πまで積分すると、

### Keyword

パルス波、ひずみ波、フーリエ級数、スペクトル、中心周波数、広帯域、UWB

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y d\theta \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。  $a_n$  と  $b_n$  は、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin n\theta d\theta \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos n\theta d\theta \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。



あとで必ず確かめておきます。

## ● パルスと多くのスペクトル



図2のような矩形波を考えてみよう。  $\theta$  が  $0 \sim \pi$  の範囲で  $y = A$ 、  $\theta$  が  $\pi \sim 2\pi$  の範囲で  $y = -A$  で繰り返す矩形波だ。これを有限のフーリエ級数で近似して表示するプログラムを作ってみよう(ここで  $A$  は正の数)。ひずみ波(ここでは矩形波)と同一の周波数の  $\sin$  波を基本波といい、その整数倍の周波数の波を高調波という。



式(2)を使うのですね。それには  $b_0$ 、 $b_n$ 、 $a_n$  の値を求める必要があります。



そうだね。幸いなことにこの連続パルスは、波形が原点に対して点対称なので、 $f(\theta) = -f(-\theta)$ 、つまり奇関数となり、そのフーリエ級数展開も奇関数のみで、係数  $b_n$  は0となる。



$b_0 = 0$ 、 $b_n = 0$  となるから、係数  $a_n$  だけを式(4)から計算すればよいのですね。それなら簡単です。

$$a_n = \frac{4A}{\pi n}$$

となりました。ただし  $n$  は奇数のみで、 $n$  が偶数のときは  $a_n$  は0となります。これを式(2)に代入して、

$$y = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \quad (n=1, 3, 5, \dots) \quad \dots\dots\dots (6)$$

が得られました。



式(6)の級数は無限級数だが、パソコンで計算する場合はその有限項の和をとって近似的に表せばよい。



Javaでプログラミングしたら図3のようになりました(p.74のコラム参照)。図3(a)は有限項の和を計算するループの最後の数に10にしたときですが、いかにも  $\sin$  波形を合成したようなリップ<sup>注1</sup>があります。



式(6)は無限級数だから実現できないが、例えば10ではなく100にすると図3(b)のように、連続パルス波形に近づいた。



なるほど。連続パルス波は多くのスペクトル<sup>注2</sup>で表されるのですね。

注1：リップ(Ripple)とは、さざ波が立ったような形状をいう。ループ回数(級数)が多いと目立たなくなる点に注意。

注2：スペクトルとは、光の波長ごとの強度の分布をいう。電気分野では信号の各周波数成分の強度分布。

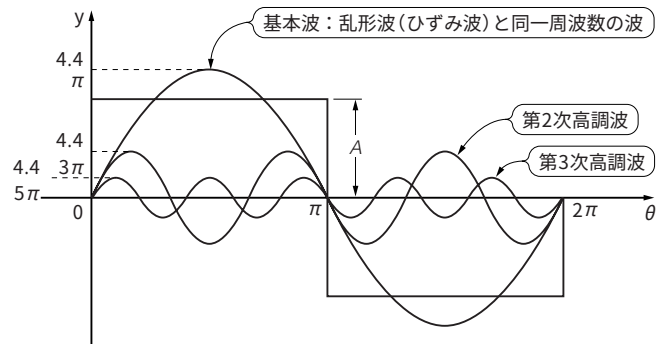


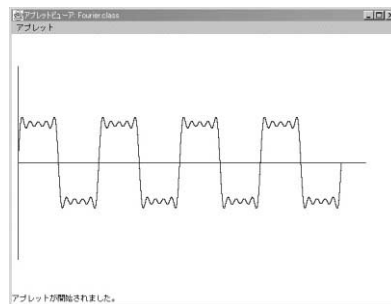
図2 矩形波

$\theta$  が  $0 \sim \pi$  の範囲で  $y = A$ 、 $\theta$  が  $\pi \sim 2\pi$  の範囲で  $y = -A$  で繰り返す。

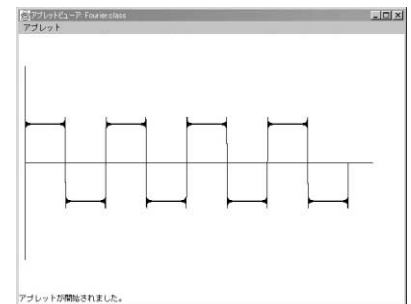
図3

## 矩形波を有限のフーリエ級数で近似して表示

無限級数をパソコンで計算する場合はその有限項の和をとって近似的に表す。有限項の和を計算するループの最後の数に10としたときは  $\sin$  波形を合成したようなリップがある。有限項の和を計算するループの最後の数に100にしたほうが連続パルス波形に近づく。



(a) ループ数が10のとき



(b) ループ数が100のとき