

伝達関数，周波数特性，極，零点の相互関係を知ろう

第5章

アナログ・フィルタの 基本的な伝達関数とその性質

本章では，簡単な伝達関数を例にとり，伝達関数の形によって利得および位相の周波数特性がどのように変わるのかを調べる。

具体的には，1次および2次の伝達関数を有するアナログ・フィルタを説明対象として，周波数特性，極，零点と伝達関数がどのような関係にあるのかを中心に解説する。

5.1 アナログ・フィルタの伝達関数

フィルタの主要な特性である利得および位相の周波数変化は，フィルタの伝達関数 $G(s)$ で決定されます。そこで，伝達関数の形によって利得や位相がどのように変わるかを調べてみましょう。

最初に，いくつか簡単な伝達関数を例にして，伝達関数の形と利得，位相の関係を説明しておきます。なお， $G(s)$ としては， s の有理式で表されるもの（有理関数）を扱います。すなわち， s の実係数多項式 $A(s)$ ， $B(s)$ の比として，

$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \dots\dots\dots (5.1)$$

と表される関数です。分子多項式 $A(s)$ ，分母多項式 $B(s)$ が s の N 次多項式 [$A(s)$ は N 次以下でもよい] の場合，伝達関数 $G(s)$ を N 次の伝達関数と呼びます。なお，周波数に対する利得と位相の各特性は， $s = j\omega (= j2\pi f)$ を伝達関数 $G(s)$ に代入して計算しますが，ここでは角周波数 ω [rad/秒] で説明を展開することにし，単に周波数 ω [rad/秒] と簡略表現します。

まず，もっとも簡単な1次の伝達関数を考えてみましょう。

5.1.1 1次のLPF(ローパス・フィルタ)

1次の有理関数のうちで分子 $A(s)$ に s の項を含まない形のものを考えてみます。一般形は，

$$G(s) = \frac{p}{s+p} ; p > 0 \dots\dots\dots (5.2)$$

で，利得と位相を表 5.1 に示します。

式 (5.2) の伝達関数を有するフィルタは，表 5.1 より，利得 $|G(j\omega)|$ については，

表 5.1 1 次の LPF

利 得	$ G(j\omega) = \left \frac{p}{p+j\omega} \right = \frac{1}{\left 1+j\left(\frac{\omega}{p}\right) \right } = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{p}\right)^2}}$
位 相	$\angle G(j\omega) = \angle(p+j0) - \angle(p+j\omega) = -\arctan(p, \omega)$

$$\begin{cases} \omega \rightarrow 0 \text{ (直流) のとき, } |G(j\omega)| \rightarrow |G(j0)| = 1 \\ \omega = p \text{ のとき, } |G(jp)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 \\ \omega \rightarrow \infty \text{ のとき, } |G(j\omega)| \rightarrow |G(j\infty)| = 0 \end{cases}$$

となり、位相 $\angle G(j\omega)$ については、

$$\begin{cases} \omega \rightarrow 0 \text{ (直流) のとき, } \angle G(j\omega) \rightarrow \angle G(j0) = 0 \\ \omega = p \text{ のとき, } \angle G(jp) = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ \\ \omega \rightarrow \infty \text{ のとき, } \angle G(j\omega) \rightarrow \angle G(j\infty) = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ \end{cases}$$

という性質をもちます(実行例 5.1)。

実行例 5.1

```
-->pp=2;gs=pp/(s+pp);aspec(gs,[0,10],'rad',0);
```

[実行例 5.1 の説明]

式 (5.2) の係数 p (変数 `pp`) を 2 に設定して、伝達関数 $G(s)$ を求め、関数コマンド `aspec` で利得と位相特性をグラフ表示します(図 5.1)。横軸の周波数は角周波数で 0 ~ 10 [rad/秒] に設定しています。なお、係数 p を変えて調べるときは、最初にカーソル・キーの \uparrow あるいは \downarrow を押して、以前に入力した文字列を表示します。次に、 \rightarrow あるいは \leftarrow を押して修正個所にカーソルを移動したあと、係数 p の数値だけを変更して改行キーを押します(以後の処理でも同様)。

図 5.1 からわかるように、式 (5.2) の伝達関数は低域 ($\omega < p$) を通過させ、高域 ($\omega > p$) を減衰させるローパス・フィルタとなります。ただし、遮断特性はなだらかで、あまり理想に近い特性とは言えません。

周波数 ω が十分高い ($\omega \gg p$) ときに、利得がほぼ $1/\omega$ の割合で減衰するのが特徴です。デシベル [dB] に換算して言うと、 -20 [dB/dec] あるいは -6 [dB/oct] の傾きで減衰します(実際の RC フィルタにおいて、電子回路シミュレータで確認すること。「5.3 アナログ・フィルタ実験室」を参照)。ここで、数値の前に付いた符号のマイナス記号は数値が減衰する(小さくなる)ことを意味し、 -20 [dB/dec] は周波数が 10 倍になると $1/10$ に小さくなること、 -6 [dB/oct] は周波数が 2 倍になると $1/2$ (半分) に小さくなることを表します。

