第 6 章
1次元熱伝導解析「Therm1D」

汎用的な1次元熱伝導解析ソフトウェアを添付しました．本ソフトウェアは，差分法により，1次元の非定常熱伝導問題を解くものです．

1次元熱伝導解析は，1方向のみの熱伝導を取り扱うため，基礎的な熱伝導問題の検討に適しており，入力データ作成の手間や計算時間も少なくて済みます．

6.1 差分法

差分法は，対象を平行メッシュで有限個の差分要素に分割し，要素毎にその要素変数に関する差分方程式を作成し，それを合わせて全体の方程式として解く解析方法です．以下では，1次元の熱伝導に限定して説明します．

（1）1次元熱伝導モデル

本ソフトウェアで取り扱うモデルを**図6.1**に示します．同図において，境界1と境界2の間に1次元に熱伝導する複数の層があります．そして，その複数の各層はそれぞれ均等分割して差分方程式を組み立てます．もちろん，複数層でなく単一層であっても構いません．

また，同図に示すように，層を構成する材料の物性は，密度は固定で，比熱と熱伝導率は温度区分により変えることができます．さらに，境界条件は，断熱，温度固定，熱伝達，熱流束，熱放射の5種類があります．

（2）差分法の基本計算式

上述のように，本ソフトウェアでは複数層の計算が可能ですが，差分法の基本計算式は複数層

図6.1●1次元熱伝導のモデル

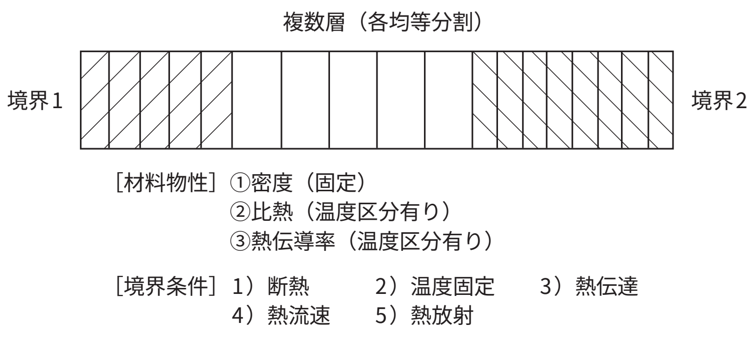
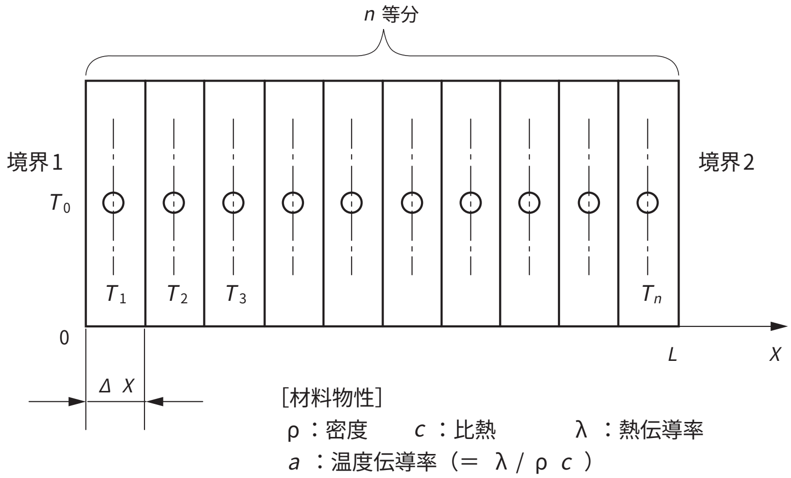


図6.2●差分法の単一層モデル



でも単一層でも同様なので，**図6.2**の単一層のモデルで説明します．

同図において，境界1と境界2の間に1次元に熱伝導する単一層があり，同層はn等分されています．また，同図と重複しますが，次のように記号を定めます．

X：X座標（熱伝導方向）　　ΔX：メッシュ幅
T_i：各メッシュの中心温度（$i=1, 2, \cdots, n$）　　T_0：境界の表面温度
ρ：密度　　c：比熱　　λ：熱伝導率　　a：温度伝導率（$=\lambda/\rho c$）

さて，1次元の非定常熱伝導問題の支配方程式は，次式で表されます．

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \tag{6-1}$$

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \tag{6-2}$$

そして，(6-2)式を差分法の式に変形するにあたり，時刻tの温度が既知で，Δt後の各部温度を計算することにします．なお，以下の式で添え字を次のように規定します．

［添え字規定］

tの時点の変数はbを添え，$t+\Delta t$の時点の変数には何も付けない．また，添え字が演算式の場合は< >内に添え字を示します．

(6-2) 式の支配方程式をクランク・ニコルソン法[注6.1]の差分方程式で表すと下記のようになります.

＜通常メッシュ＞

メッシュiにおける差分方程式を示します.

$$\frac{T_i - T_{ib}}{\Delta t} = a\frac{T_{<i+1>} - 2\cdot T_i + T_{<i-1>}}{2(\Delta X)^2} + a_b\frac{T_{<i+1>} - 2\cdot T_{ib} + T_{<i-1>b}}{2(\Delta X)^2} \tag{6-3}$$

$$\therefore \frac{a}{2(\Delta X)^2}T_{<i+1>} - \left[\frac{a}{(\Delta X)^2} + \frac{1}{\Delta t}\right]T_i + \frac{a}{2(\Delta X)^2}T_{<i-1>} = -\frac{T_{ib}}{\Delta t} - B_b \tag{6-4}$$

ただし, $B_b = a_b\frac{T_{<i+1>} - 2\cdot T_{ib} + T_{<i-1>b}}{2(\Delta X)^2}$ (6－5)

＜端メッシュ＞

左端境界メッシュ1における差分方程式を導出します．なお，右端メッシュnにおける差分方程式は，T_1，T_2の代わりにT_n，$T_{<n-1>}$を入れます．まず，ある時刻において，左端境界メッシュでは次式が成立します.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\frac{T_2 - T_1}{\Delta X} - \frac{T_1 - T_0}{\Delta X / 2}}{\Delta X} = \frac{T_2 - 3\cdot T_1 + 2\cdot T_0}{(\Delta X)^2} \tag{6-6}$$

クランク・ニコルソン法では，(6-6) 式の右辺は，時刻tと時刻$t+\Delta t$との平均を取ります．したがって，(6-2) 式は次の差分方程式となります.

$$\frac{T_1 - T_{1b}}{\Delta t} = a\frac{T_2 - 3\cdot T_1 + 2\cdot T_0}{2(\Delta X)^2} + a_b\frac{T_{2b} - 3\cdot T_{1b} + 2\cdot T_{0b}}{2(\Delta X)^2} \tag{6-7}$$

ただし，境界表面温度T_0は境界条件により異なり，T_1の関数になることもあります．それゆえ，(6-7) 式は境界条件により，個別に整理し直します（後述する）.

（3）境界表面温度

左端の境界1について，各境界種類毎に表面温度の式を示します.

＜断熱境界＞

断熱境界では，境界側は何も考慮しなくてよく，表面温度は端メッシュ中心温度と同じになります.

(注6.1) クランク・ニコルソン法は，(6-2) 式の右辺について，時刻tと$t+\Delta t$との平均を取る方法である．他に，時刻tを採用する前進差分法，時刻$t+\Delta t$を採用する後退差分法がある.