見本

第10章 ウェーブレット変換

- ウェーブレット変換の定義
- 離散ウェーブレット
- ハールウェーブレット
- ドベシィウェーブレット
- 多重解像度変換
- サブバンド分解合成

信号の解析に一般的に用いるフーリエ変換はその基底として，無限に続く局在性をもたない三角関数を用いているため，フーリエ変換後の周波数領域では時間的な情報は完全に失われます．時間とともに周波数がどのように変化するかを調べる方法として，適当な窓関数を乗じ，時間軸を移動しながらフーリエ変換を行う短時間フーリエ変換があります．これ発展させたものが本章で扱うウェーブレット変換です．

ウェーブレットは，フランス人Morletによって，石油探査を目的とする人工地震波の解析のために導入されたと言われており，それ以後多くの数学者や工学者により研究され，信号処理や画像処理の分野でも盛んに応用されています．JPEG2000は，DCTの代わりにウェーブレット変換を用いています．

本章ではウェーブレットの基礎的な事項，ウェーブレットと多重解像度解析およびサブバンド分解･合成との関連を概略説明し，画像に対する実施例を示します．直感的にわかりやすくするため厳密な数学的な定義は省いています．

10.1　ウェーブレット変換

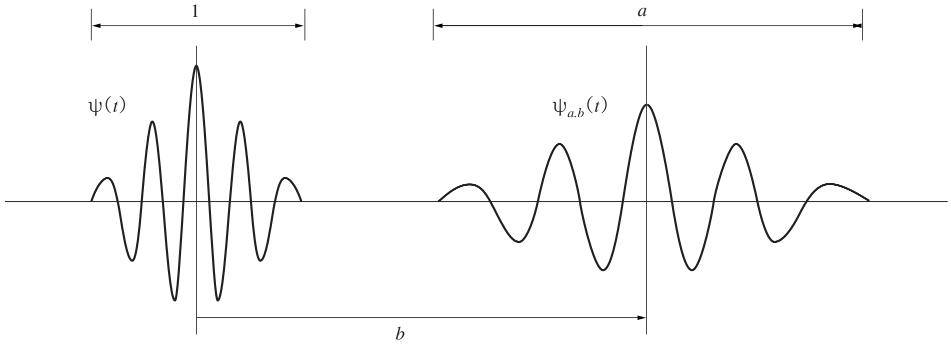
短時間フーリエ変換では，時間幅（窓関数の幅）が一定であるため，周波数を高くした場合でも時間分解能が向上しません．一方，ウェーブレット変換では，高い周波数のときは時間幅を短縮し，低い周波数のときは時間幅を広げる基底を用いるため, 局所的な周波数情報が得られ効率的な時間 - 周波数解析ができます．

ウェーブレットには連続ウェーブレットと2進分割して得られる離散ウェーブレットがあります．ここではそれらの定義を簡単に示し, 離散ウェーブレットのもっとも簡単な例としてハール関数について説明します．

10.1.1 連続ウェーブレット変換

ウェーブレット（wavelet）とは，チャーミングな響きをもつ言葉ですが,“小さな波”あるいは“さざなみ”という意味です．**図10.1**に示すような局在性のある波として定義され，波の基本単位として用いられます．これを**基本ウェーブレット**（basic wavelet），あるいは**マザーウェーブレット**と言い，$\psi(t)$で表現します．

図10.1 基本ウェーブレットとウェーブレット関数



ウェーブレット関数は2つの実数パラメータa, bを用いて,

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{10.1}$$

のように定義されます．これは，**図10.1**に示すようにウェーブレット関数は基本ウェーブレット$\psi(t)$を横方向にa倍し，横方向にbだけ平行移動したものです．大きさは$1/\sqrt{a}$倍されますが，エネルギ的に一定に保つために必要です．

aは**スケール**（scale）と呼ばれ，ウェーブレットの時間幅を表しているので$1/a$は周波数に相当します．

以後，横軸変数をxとします．任意の信号$f(x)$とウェーブレット関数$\psi_{a,b}(x)$との内積

$$W(a,b) = < f(x), \psi_{a,b}(x) > = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \psi^*\left(\frac{x-b}{a}\right) dt \tag{10.2}$$

は**ウェーブレット変換**（wavelet transform）あるいは**連続ウェーブレット変換**と言います．

ウェーブレット関数は一般的に複素数であり，内積には複素共役が用いられます．$W(a, b)$はフーリエ変換のフーリエ係数に相当し，$x=b$において信号$f(x)$のなかに$\psi_{a,b}(x)$の成分がどれだけ含まれるかを表しています．aが小さいときは高い周波数成分に，aが大きいときは低い周波数成分に対応します．

すなわち，高い周波数に対しては，周波数分解能は小さくなりますが時間（または位置）分解能は大きくなり，低い周波数に対しては，周波数分解能は高くなりますが時間（位置）分解能は小さくなります．

10.1.2 離散ウェーブレット変換

適当な基本ウェーブレット関数を選び，スケールaおよび平行移動量bを適当に離散化すればウェーブレット関数を正規直交基底（8.1節参照）とすることが可能です．パラメータa, bは，2進分割によって，

$$a = 2^{-j}\ ,\ \ b = k2^{-j} \tag{10.3}$$

のよう離散化するのが一般的です．$j=0, \pm1, \pm2, \cdots$のように離散化する場合，ウェーブレット関数の横幅