見本

第 7 章 フーリエ変換による線図形処理

- 1次元フーリエ変換
- 離散フーリエ変換（DFT）
- 高速フーリエ変換（FFT）
- フーリエ記述子

フーリエ変換の基本的な考えは，“すべての信号は，三角関数（正弦波）の和として表現できる”ということです．正弦波はそれぞれ固有の周波数を持っており，フーリエ解析によって，信号の中にどの周波数成分がどれだけ含まれているか調べることが可能です．

フーリエ変換後に特定の周波数成分を取り除き再合成（逆フーリエ変換）すればフィルタとなります．フーリエ変換は情報圧縮や特徴抽出にも利用され，信号処理や画像処理を扱う技術者にとって必要不可欠なものとなっています．

本章では，1次元フーリエ変換の原理や離散フーリエ変換について解説し，応用として2値化線図形に対するフーリエ記述子を取り上げます．わずかなフーリエ係数によって線図形が復元されるようすがわかります．

7.1　フーリエ変換

フーリエ変換は，フランスの数学者Fourierの人名に由来します．ここでは，その考えかたを理解し，離散信号を扱えるようにした離散フーリエ変換およびその高速化手法について概略説明します．

7.1.1 実フーリエ級数展開

図7.1は，時間信号

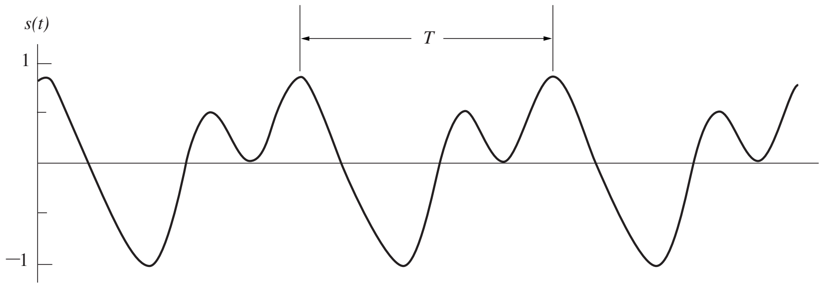
$$s(t) = 0.6\cos\omega t - 0.3\sin\omega t + 0.4\sin 2\omega t + 0.2\cos 3\omega t \tag{7.1}$$

を表しており，時間領域（実世界，実空間）で観測できる波形です．Tをこの信号の周期とすると，$f=1/T$は基本周波数，$\omega=2\pi f$は基本角周波数です．

式(7.1)のそれぞれのcos波，sin波の振幅を表示したものは**図7.2**のようになります．縦軸の$a[k]$，$b[k]$はそれぞれ$\cos k\omega t$，$\sin k\omega t$の係数を表しており，横軸の次数kは，基本周波数の整数倍を表しています．

このように，横軸を周波数，縦軸を振幅で表現したパターンを**スペクトル**（spectrum）と言います．いわば，**図7.2**は周波数の世界（像空間）で表現した信号を表しています．

図7.1 1次元信号の波形（実世界）



以上を一般化したものがフーリエの考えかたです．すなわち，すべての周期信号は直流分と基本角周波数$\omega=2\pi/T$およびその整数倍の角周波数をもつ正弦波の和として表現できます．式で示すと，

$$s(t)=a[0]+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{a[k]\cos k\omega t+b[k]\sin k\omega t\right\} \tag{7.2}$$

となります．これを**実フーリエ級数展開**と言います．この展開式の係数は**フーリエ係数**と呼ばれ，$a[0]$は，直流分あるいは平均値を表す定数項です．$a[1]$，$b[1]$は，信号$s(t)$に含まれる交流成分の中でもっとも低い周波数（基本波周波数$f=1/T$）をもつ成分の大きさ（振幅）を表しており，**基本波成分**と呼ばれます．$k\geq 2$の$a[k]$，$b[k]$は高次成分の振幅であり，**高調波成分**と呼ばれます．

ここでは，詳細な証明は省略しますが，三角関数の**直交性**を用いて**式(7.2)**のフーリエ係数は次式によって求められます．

$$\left.\begin{aligned}a[0]&=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\,dt\\ a[k]&=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\cos k\omega t\,dt\\ b[k]&=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\sin k\omega t\,dt\end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

図7.2 1次元信号のスペクトル（周波数の世界）