

第13章

線形システム

線形システムは、工学のみならず、多くの分野に現れる重要なシステムです。本章では、まず Scilab での線形システムの定義方法を紹介します。次に、線形システムの時間応答と周波数応答の計算方法を学びます。また、線形システムの状態空間表現を導入します。なお、数学的内容は最小限に留めます。証明などは、線形システムに関する成書を参照してください。

13.1 信号とシステム

時間とともに変化する値を信号(signal)といいます。信号は、時間に関する関数として表現できます。

図 13.1 に正弦波信号を示しています。図 13.1 の正弦波のように、時間に関して連続な信号を連続時間信号(continuous-time signal)といいます。一方、ある時間においてのみ値をとる信号を離散時間信号(discrete-time signal)といいます。離散時間信号は、たとえば、コンピュータで信号を処理するときにご利用されます。

図 13.2 のように、ある入力信号に対して、ある出力信号を生成する仕組みをシステムといいます。本章では、連続時間信号を入出力とする連続時間システムを考えます。

入力信号が $u(t)$ 、出力信号が $y(t)$ のシステムを考えましょう。ただし、負の時間において入力信号と出力信号はないもの、つまり $t < 0$ において $u(t) = 0$ 、 $y(t) = 0$ とし、入力を時間 0 から始めることにします。

システムが線形で時不変であれば、 $u(t)$ と $y(t)$ に次の関係があります。

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 = b_{m+1} \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_m \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \quad \dots\dots\dots(13.1)$$

ただし、 n と m は $n \geq m$ を満足する正整数、 a_i 、 b_i は実数とします。 n を連続時間線形時不変システムの次数(order)といいます。以下、連続時間線形時不変システムを単に線形システムと呼ぶことに

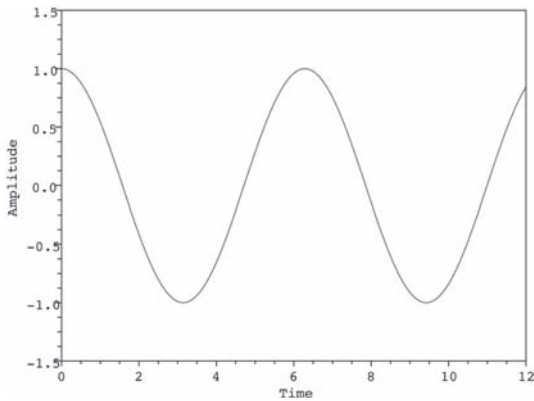


図13.1 連続時間信号

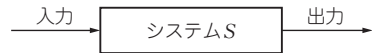


図13.2 システム

します。

● 線形性と時不変性

入力信号 $u_1(t)$, $u_2(t)$ に対する出力信号を, それぞれ $y_1(t)$, $y_2(t)$ とします. 二つの入力信号の線形和 $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ に対する出力信号が, 出力信号の線形和 $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ になるとき「システムは線形」といいます. 一方, 時間が経過しても係数が変化しない性質を時不変性といいます.

● 定係数常微分方程式

式(13.1)を定係数常微分方程式(あるいは単に常微分方程式)といいます. 式(13.1)を満たす $y(t)$ は, 時間0における初期値,

$$\frac{d^k y(0)}{dt^k}, k = 0, \dots, n-1 \quad \dots\dots\dots(13.2)$$

$$\frac{d^k u(t)}{dt^k}, k = 0, \dots, m-1 \quad \dots\dots\dots(13.3)$$

と入力信号 $u(t)$ ($t \geq 0$) から求めることができます.

■ 13.2 伝達関数と線形システムの定義

連続時間信号を解析するためにラプラス変換があります. 信号 $x(t)$ の(片側)ラプラス変換は, 以下で定義されます.

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

初期値をすべて0とし、式(13.1)の両辺をラプラス変換すると、

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

となります。ただし、 $Y(s)$ と $U(s)$ は $y(t)$ と $u(t)$ のラプラス変換、 $H(s)$ は以下で定義される s の有理式です。

$$H(s) = \frac{b_{m+1}s^m + b_m s^{m-1} + \dots + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1}$$

この $H(s)$ を伝達関数と呼びます。線形システムは、伝達関数で特徴づけられます。

● 線形システムの定義

Scilabでは、線形システムを関数`syslin`を用いて定義します。

伝達関数Hが有理式Hの線形システムs1は、

```
s1=syslin('文字',H)
```

で定義します。ここで文字は、線形システムが連続時間システムの場合はcを、入出力が離散時間信号となる離散時間システムの場合はdとします。なお、cはcontinuous time、dはdiscrete timeの頭文字に対応しています。

次の伝達関数を持つ線形システムを考えましょう。

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2} \dots\dots\dots(13.4)$$

まず、伝達関数Hを、

```
-->s=poly(0,'s');
-->H=(2*s+1)/(s^2+3*s+2)
H =
      1 + 2s
-----
      2
2 + 3s + s
```

で定義します。伝達関数Hを持つ線形システムs1は、

```
-->S1=syslin('c',H)
S1 =
      1 + 2s
-----
      2
2 + 3s + s
```

で定義できます。

線形システムは分子多項式と分母多項式を用いて、

