第4章

伝達関数，周波数特性，極，零点の相互関係を知ろう

アナログ・フィルタの基本的な伝達関数とその性質

ここでは，簡単な伝達関数を例にとり，伝達関数の形によって利得および位相の周波数特性がどのように変わるのかを調べる．
具体的には，1次および2次の伝達関数を有するアナログ・フィルタを説明対象として，周波数特性，極，零点と伝達関数がどのような関係にあるのかを中心に解説する． （筆者）

1 アナログ・フィルタの伝達関数

フィルタの主要な特性である利得および位相の周波数変化は，フィルタの伝達関数 $G(s)$ で決定されます．そこで，伝達関数の形によって利得や位相がどのように変わるかを調べてみましょう．

最初に，いくつか簡単な伝達関数を例にして，伝達関数の形と利得，位相の関係を説明しておきます．なお，$G(s)$ としては，s の有理式で表されるもの（有理関数）を扱います．すなわち，s の実係数多項式 $A(s)$，$B(s)$ の比として，

表1　1次のLPF

利　得	$\left\lvert G(j\omega)\right\rvert=\left\lvert\dfrac{p}{p+j\omega}\right\rvert=\left\lvert\dfrac{1}{1+j\left(\dfrac{\omega}{p}\right)}\right\rvert=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{p}\right)^2}}$
位　相	$\angle G(j\omega)=\angle(p+j0)-\angle(p+j\omega)=-\arctan(p,\ \omega)$

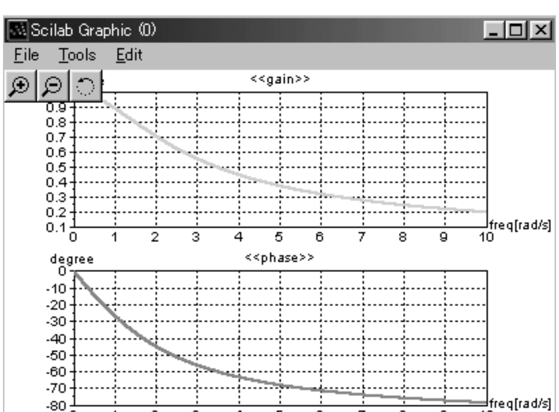

図1　1次のLPF：$G(s)=\dfrac{2}{s+2}$

$$G(s)=\frac{A(s)}{B(s)} \quad\cdots\cdots(1)$$

と表される関数です．分子多項式 $A(s)$，分母多項式 $B(s)$ が s の N 次多項式〔$A(s)$ は N 次以下でもよい〕の場合，伝達関数 $G(s)$ を N 次の伝達関数と呼びます．なお，周波数に対する利得と位相の各特性は，$s=j\omega(=j2\pi f)$ を伝達関数 $G(s)$ に代入して計算しますが，ここでは角周波数 ω[rad/秒] で説明を展開することにし，単に周波数 ω[rad/秒] と簡略表現します．

まず，もっとも簡単な1次の伝達関数を考えてみましょう．

● 1次のLPF（ローパス・フィルタ）

1次の有理関数のうちで分子 $A(s)$ に s の項を含まない形のものを考えてみます．一般形は，

$$G(s)=\frac{p}{s+p}\quad ;\ p>0 \quad\cdots\cdots(2)$$

で，利得と位相を**表1**に示します．

この式(2)の伝達関数を有するフィルタは，**表1**より，利得 $\lvert G(j\omega)\rvert$ については，

$$\begin{cases}\omega\to 0\text{（直流）のとき，}\ \lvert G(j\omega)\rvert\to\lvert G(j0)\rvert=1\\ \omega=p\text{ のとき，}\ \lvert G(jp)\rvert=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\fallingdotseq 0.707\\ \omega\to\infty\text{ のとき，}\ \lvert G(j\omega)\rvert\to\lvert G(j\infty)\rvert=0\end{cases}$$

となり，位相 $\angle G(j\omega)$ については，

$$\begin{cases}\omega\to 0\text{（直流）のとき，}\ \angle G(j\omega)\to\angle G(j0)=0\\ \omega=p\text{ のとき，}\ \angle G(jp)=-\dfrac{\pi}{4}=-45^\circ\\ \omega\to\infty\text{ のとき，}\ \angle G(j\omega)\to\angle G(j\infty)=-\dfrac{\pi}{2}=-90^\circ\end{cases}$$

という性質をもちます（**実行例1**）．

実行例1
```
-->pp=2;gs=pp/(s+pp);aspec(gs,[0,10],...
                                'rad',0);↵
```

［**実行例1の説明**］

式(2)の係数p(変数pp)を2に設定して，伝達関数$G(s)$を求め，関数コマンド**aspec**で利得と位相特性をグラフ表示します(**図1**)．横軸の周波数は角周波数で0～10［rad/秒］に設定しています．なお，係数pを変えて調べるときは，最初にカーソル・キーの$\boxed{\uparrow}$あるいは$\boxed{\downarrow}$を押して，以前に入力した文字列を表示します．次に，$\boxed{\rightarrow}$あるいは$\boxed{\leftarrow}$を押して修正個所にカーソルを移動したあと，係数pの数値だけを変更して改行キーを押します(以後の処理でも同様)．

図1からもわかるように，式(2)の伝達関数は低域($\omega < p$)を通過させ，高域($\omega > p$)を減衰させるローパス・フィルタとなります．ただし，遮断(しゃだん)特性はなだらかで，あまり理想に近い特性とは言えません．

周波数ωが十分高い($\omega \gg p$)ときに，利得がほぼ$1/\omega$の割合で減衰するのが特徴です．デシベル［dB］に換算して言うと，－20［dB/dec］あるいは－6［dB/oct］の傾きで減衰します．ここで，数値の前に付いた符号のマイナス記号は数値が減衰する(小さくなる)ことを意味し，－20［dB/dec］は周波数が10倍になると1/10に小さくなること，－6［dB/oct］は周波数が2倍になると1/2(半分)に小さくなることを表します．

また，$\omega = p$のとき利得$|G(jp)| = 1/\sqrt{2}$ (　－3［dB］)になるので遮断周波数になります．したがって，pの値を任意に設定することにより，任意の遮断周波数のLPFを作ることができます．

とくに，$p = 1$とおいた伝達関数，

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad \cdots\cdots (3)$$

を考えると，式(2)の一般式の特性は式(3)の周波数軸をp倍に伸縮したものになっています．そこで，式(3)の伝達関数を有するLPFを**基準ローパス・フィルタ**と呼ぶことにします．つまり，式(3)の基準ローパス・フィルタの伝達関数において，

$$s \rightarrow \frac{s}{p} \quad \cdots\cdots (4)$$

と変数置換して式(2)の一般式が得られます．

● 1次のHPF(ハイパス・フィルタ)

次に，分子$A(s)$に定数項を含まない形のものを考えてみます．一般形は，

$$G(s) = \frac{s}{s+p} \quad ; p > 0 \quad \cdots\cdots (5)$$

で，利得と位相を**表2**に示します．

この式(5)の伝達関数を有するフィルタは，**表2**より，利得$|G(j\omega)|$については，

$$\begin{cases} \omega \rightarrow 0\text{(直流)のとき，} |G(j\omega)| \rightarrow |G(j0)| = 0 \\ \omega = p\text{のとき，} |G(jp)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 \\ \omega \rightarrow \infty\text{のとき，} |G(j\omega)| \rightarrow |G(j\infty)| = 1 \end{cases}$$

となり，位相$\angle G(j\omega)$については，

表2　1次のHPF

利　得	$|G(j\omega)| = \left|\dfrac{j\omega}{p+j\omega}\right| = \left|\dfrac{1}{1-j\left(\dfrac{p}{\omega}\right)}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2}}$
位　相	$\angle G(j\omega) = \angle(0+j\omega) - \angle(p+j\omega) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(p,\ \omega)$

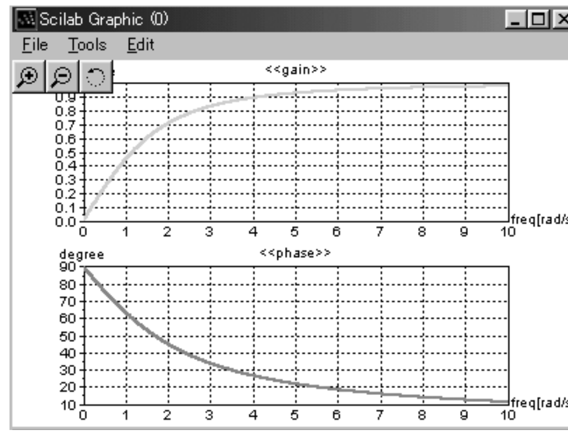

図2　1次のHPF：$G(s) = \dfrac{s}{s+2}$

$$\begin{cases} \omega \rightarrow 0\text{(直流)のとき，} \angle G(j\omega) \rightarrow \angle G(j0) = \dfrac{\pi}{2} = 90° \\ \omega = p\text{のとき，} \angle G(jp) = \dfrac{\pi}{4} = 45° \\ \omega \rightarrow \infty\text{のとき，} \angle G(j\omega) \rightarrow \angle G(j\infty) = 0 \end{cases}$$

という性質をもちます(**実行例2**)．

実行例2

```
-->pp=2;gs=s/(s+pp);aspec(gs,[0,10],'rad',0);↵
```

［**実行例2の説明**］

式(5)の係数p(変数pp)を2に設定して，伝達関数$G(s)$を求め，関数コマンド**aspec**で利得と位相特性をグラフ表示します(**図2**)．ここで，係数pをいろいろな数値に変えて，特性の変化を調べてみてください．

図2からわかるように，式(5)の伝達関数は低域($\omega < p$)を減衰させ，高域($\omega > p$)を通過させるハイパス・フィルタと言えます．遮断特性はなだらかで，周波数ωが十分低い($\omega \ll p$)ときに，利得がほぼωの割合で増大するのが特徴で，+20［dB/dec］の傾きになります．

LPFと同様に，やはりpが遮断周波数になり，pの値を任意に設定することによって，任意の遮断周波数のHPFを作ることができます．得られるHPFの特性とLPFの特性とが$\omega = p$について対称になっていますが，これは伝達関数の形からも明らかで，式(3)の基準ローパス・フィルタにおいて，