

やり直しのための通信数学

三谷 政昭

第15回 ウェーブレット変換とフィルタ・バンク構成

今回は、ウェーブレット変換/逆変換を実現するための基本的な要素として、マルチレート信号処理の考え方を取り上げた。つまり、ローパス・フィルタとハイパス・フィルタの組み合わせ、およびレート変換によって、周波数と時間を同時に分析/合成することが可能なことを示した。

今回は、前回の内容を踏まえて2のべき乗のサンプル数 $N=2^L$ (L は正整数)のウェーブレット変換における一般的なフィルタ・バンク構成を示し、マルチレート信号処理のレート変換(ダウン・サンプリング、アップ・サンプリング)などについて説明する。さらに、画像データを処理する2次元ウェーブレット変換のツリー構成によるオクターブ分割と呼ばれる分析/合成について解説する。(筆者)

フィルタ・バンク構成システム

まずは、音声などの1次元信号に対するウェーブレット変換(WT)値と逆変換(IWT)値を算出するための、フィルタ・バンクを利用した信号処理システムの一般的な構成を図15.1に示す。

図15.1の信号処理システムは、

分析(アナリシス・バンク; Analysis bank)

合成(シンセシス・バンク; Synthesis bank)

の二つのフィルタ・バンクから構成されている。分析フィルタ・バンクの出力はサブバンド(subband)信号と呼ばれ、周波数帯域ごとに分割されている。WT値は、このサブバンド信号に相当し、データ圧縮、領域分割、適応信号処理などのさまざまな応用分野で利用される。

それでは、フィルタ・バンク構成において、サブバンド信号として複数の帯域分割を行う場合のシステム構成の考え方を説明することにしよう。

具体例として、サンプル数 $N=4$ ($=2^2$)個のデジタル信号を

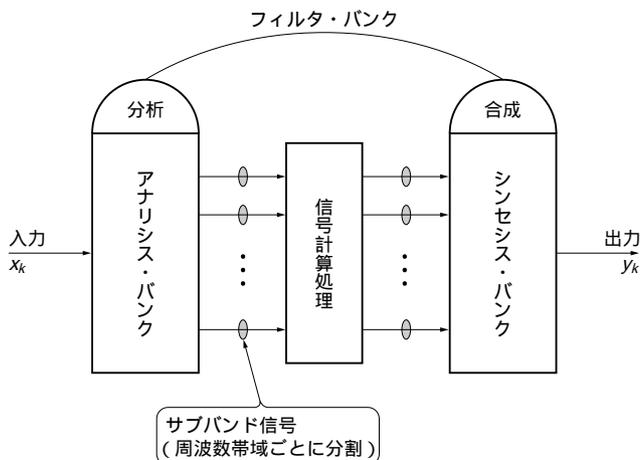


図15.1 フィルタ・バンク構成システムの概略図

一つのブロックとしてWT, IWT処理する場合を例に取り上げる。最初にWT値を求め、さらにIWT計算を行って再合成する処理を体験してみよう(図15.2)。このフィルタ・バンクのシステム構成はちょうど樹木(英語でtree、これ以降ツリーと表記)の枝分かれしているようすに似ており、図15.2のフィルタ・バンク構成は「オクターブ分割によるツリー構成」と呼ばれている。

まずは、図15.2のフィルタ・バンク構成に基づき、信号成分を周波数帯域ごとに分割し、得られた信号から元の信号を再合成する処理を体験してみることにはしたい。

分析フィルタ・バンク(WT値計算)

いま、デジタル信号を、

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, \dots\}$$

とする。そして、左から右へ4サンプルを1ブロックとして順に入力して得られる二つの周波数帯域に分割された信号を、それぞれ図15.3に示すように、

$$\{e_1^{(L)}, e_2^{(L)}, e_3^{(L)}, e_4^{(L)}, \dots\} \dots\dots\dots(1)$$

$$\{e_1^{(H)}, e_2^{(H)}, e_3^{(H)}, e_4^{(H)}, \dots\} \dots\dots\dots(2)$$

で表す(第1段目)。ここで、式(1)は上付き文字(L)で第1段目のローパス・フィルタの出力を、式(2)は上付き文字(H)で第1段目のハイパス・フィルタの出力を表している。以下では、ローパス・フィルタの出力を“LP出力”、ハイパス・フィルタの出力を“HP出力”と表記することにする。

さらに、式(1)のLP出力 $\{e_m^{(L)}\}$ から得られる二つの周波数帯域に分割された信号をそれぞれ

$$\{e_1^{(LL)}, e_2^{(LL)}, e_3^{(LL)}, e_4^{(LL)}, \dots\} \dots\dots\dots(3)$$

$$\{e_1^{(LH)}, e_2^{(LH)}, e_3^{(LH)}, e_4^{(LH)}, \dots\} \dots\dots\dots(4)$$

と表すことにする(第2段目)。ここで、式(3)は第2段目のLP出力に、式(4)は第2段目のHP出力に相当している。

このとき、分析フィルタ・バンクの出力は次のようにブロッ

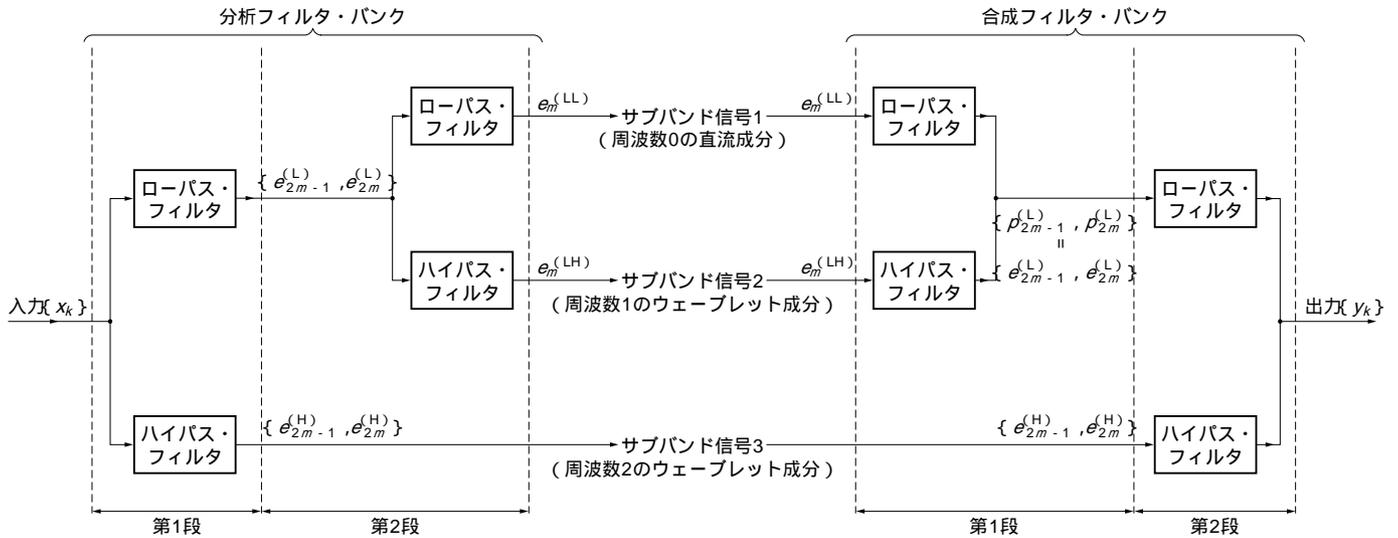


図 15.2 WT, IWT 処理のフィルタ・バンク構成による実現(三つの帯域分割の場合)

ク計算される。

ブロック 1 ($m=1$) の信号 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ に対する計算

● 第 1 段

$$e_1^{(L)} = \frac{x_1 + x_2}{2}, e_2^{(L)} = \frac{x_3 + x_4}{2} \dots (5)$$

$$e_1^{(H)} = \frac{x_1 - x_2}{2} = C_2^{(0)}[1], e_2^{(H)} = \frac{x_3 - x_4}{2} = C_2^{(2)}[1] \dots (6)$$

ここで、 $C_2^{(0)}[1]$, $C_2^{(2)}[1]$ はそれぞれ、ブロック 1 の周波数 2 のウェーブレット成分である。

● 第 2 段

$$e_1^{(LL)} = \frac{e_1^{(L)} + e_2^{(L)}}{2} = C_0^{(0)}[1] \dots (7)$$

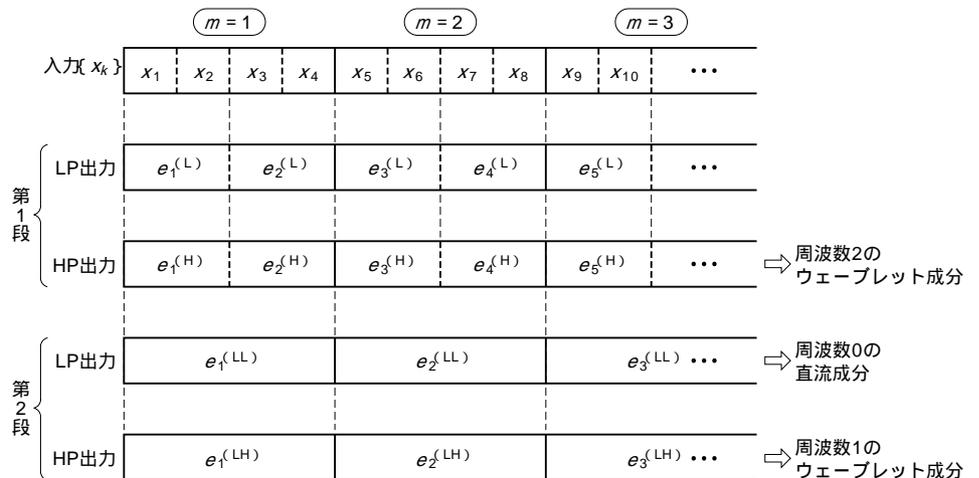
$$e_1^{(LH)} = \frac{e_1^{(L)} - e_2^{(L)}}{2} = C_1^{(0)}[1] \dots (8)$$

ここで、 $C_0^{(0)}[1]$ はブロック 1 の直流成分、 $C_1^{(0)}[1]$ はブロック 1 の周波数 1 の基本ウェーブレット成分である。

ブロック 2 ($m=2$) の信号 $\{x_5, x_6, x_7, x_8\}$ に対する計算

● 第 1 段

$$e_3^{(L)} = \frac{x_5 + x_6}{2}, e_4^{(L)} = \frac{x_7 + x_8}{2} \dots (9)$$



[計算例] $\left(e_1^{(L)} = \frac{x_1 + x_2}{2}, e_2^{(L)} = \frac{x_3 + x_4}{2}, e_3^{(L)} = \frac{x_5 + x_6}{2}, \dots \right)$
 $\left(e_1^{(H)} = \frac{x_1 - x_2}{2}, e_2^{(H)} = \frac{x_3 - x_4}{2}, e_3^{(H)} = \frac{x_5 - x_6}{2}, \dots \right)$
 $\left(e_1^{(LL)} = \frac{e_1^{(L)} + e_2^{(L)}}{2}, e_2^{(LL)} = \frac{e_3^{(L)} + e_4^{(L)}}{2}, e_3^{(LL)} = \frac{e_5^{(L)} + e_6^{(L)}}{2}, \dots \right)$
 $\left(e_1^{(LH)} = \frac{e_1^{(L)} - e_2^{(L)}}{2}, e_2^{(LH)} = \frac{e_3^{(L)} - e_4^{(L)}}{2}, e_3^{(LH)} = \frac{e_5^{(L)} - e_6^{(L)}}{2}, \dots \right)$

図 15.3 分析フィルタ・バンクにおける信号計算の流れ(1 ブロック 4 サンプルの場合)