3 ディジタル信号処理の気持ちがわかる！

信号数学の初歩の初歩

ディジタル信号処理（DSP）というと，難しい数式が多く使われていて，とっつきにくいというイメージをもたれているエンジニアが多いかもしれません．おそらく，「数式が外国語の文章のように見えて，日本語に翻訳することができない．だから，数式を単に丸暗記するだけで，数式のもつ物理的な意味がつかめない」，という感じではないでしょうか．

本章では，そうした状況を克服すべくディジタル信号処理のココロをつかんで，数式を翻訳するノウハウを習得してもらうために，信号数学の真髄と言える「z変換，差分方程式，ブロック図，伝達関数（あるいはシステム関数），周波数特性」などにフォーカスして，初歩の初歩から例解方式を使って丁寧に解説します．（筆者）

三谷 政昭

● DSPを使いこなすための基礎は信号数学にあり!!

ディジタル信号処理それ自体の計算は，加減乗除（＋，－，×，÷）の単純な四則計算のかたまりなので，小学生の算数の範囲です．

ところが，DSPを表す数式は一つの言葉なので，物理的なイメージと結び付けることが重要です．したがって，ただ闇雲に数式を暗記するだけでは，内容がさっぱりわからない，というジレンマに陥ってしまいます（いわゆる，DSPアレルギー症候群）．DSPの本質を理解するには，順序だった理屈（屁理屈？）も大切ですが，それ以上に重要なのは「直感的な理解とイメージ」と断言できます（筆者の経験から言えることですが…）．

そこで，数式の表現力に頼ることをできるだけ避けて，数式を物理的な言葉で“翻訳”した表現を心がけ，直感的な理解とイメージを皆さんに植え付けることによって，「信号数学に対するアレルギー」を取り去ってもらおうというわけです．

1 ディジタル信号は順番に並んだ数値集合なり

信号とは，多様な物理量（電圧，電流，音圧，光など）を表すものです．一般に，アナログ（時間連続）信号とディジタル（時間離散）信号に大別されます．

ディジタル信号は，順番に並ぶ数値の集合（数列）であり，k番目の数値を，

$x[k]$　；kは整数

で書き表すと，

$$\{x[k]\}_{k=-\infty}^{k=\infty}$$

と表現できます．

また，ディジタル信号$x[k]$は，アナログ信号を「サンプリング（sampling）」することによって得られ，サンプリングが一定の時間間隔T［秒］で行われると，

$$x[k]=x\left[\,(kT)\,\right] \quad \cdots\cdots (1)$$

となります（**図1**）．こうした数列であるディジタル信号$\{x[k]\}_{k=-\infty}^{k=\infty}$を四則計算することによって，多彩なディジタル信号処理が実現されるという図式です．

2 微分は“ひき算”，積分は“たし算”でできる!?

「微分，積分」という言葉は，「微かに分かる，分かった積もり」と揶揄（やゆ）されるほど，何となく難しそうな内容で，ましてや考えたくもない，と思われるかもしれません．でも，そんな心配はいりません！ なぜなら，小学1年生の算数で最初に学ぶ“たし算（＋）とひき算（－）”を利用するだけですから．

専門的に言えば，大学レベルのディジタル・コンピュー

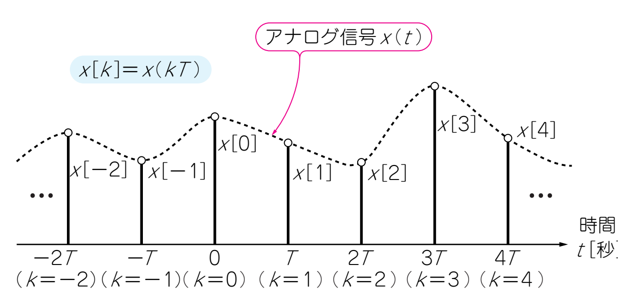

図1　ディジタル信号

KEYWORD――サンプリング，リーマン和，差分方程式，ディジタル・システム，z変換，デルタ数列，インパルス系列，伝達関数，極座標表示，周波数選択特性

タによる数値微分，数値積分と称される数値計算アルゴリズム（プログラム）を使います．

● 微分は “ひき算” なり

まず，高校数学のおさらいからです．微分の定義を思い起こしてみましょう．微分は，ある関数 $x(t)$ の $t=t_0$ における接線の傾き（微分値）なので，微小値 Δt に対して，

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0)-x(t_0-\Delta t)}{\Delta t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

で表すことができます（**図2**）．ここで，$t_0=kT$，$\Delta t=T$ と置き，サンプリング間隔 T が十分に小さければ，式(2)より，

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=t_0}\cong\frac{x(t_0)-x(t_0-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{x(kT)-x((k-1)T)}{T}=\frac{x[k]-x[k-1]}{T}$$

と表され，式(2)の分子項の隣り合う信号間の“ひき算”が“微分”と密接に関係することがわかります．よって，微分値を $y(t)$ で表せば，サンプル値 $y[k]=y(kT)$ は，

$$y[k]=\frac{x[k]-x[k-1]}{T} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

と導かれます．

例えば，**図3**(**a**)の入力に対する式(3)の“ひき算”出力は**図3**(**b**)となり，0から1および1から0に信号が変化する点が得られます．また，“ひき算”処理を文字画像（黒は1，白は0とする）に適用すれば，輪郭を取り出せることになります〔**図3**(**c**)〕．

このように，信号変化点や画像の輪郭を取り出す微分処理が，小学1年生の“ひき算”で実現できるというわけです．「ディジタル信号処理なんて，恐るるに足らず」，ではありませんか．

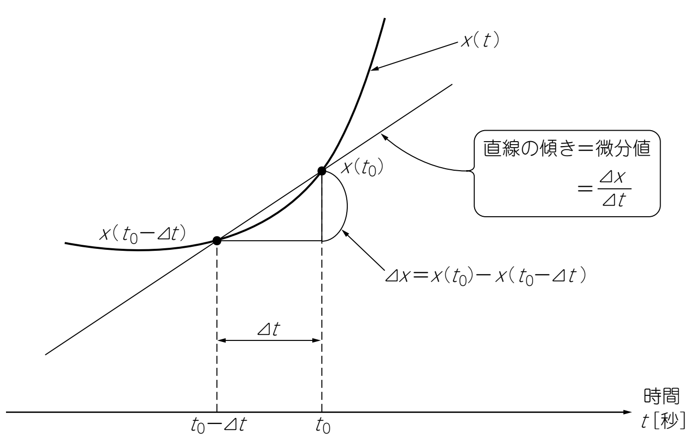

図2　微分の定義

● 積分は “たし算” なり

関数 $x(t)$ を積分した値を $y(t)$ とすれば，

$$y(\tau)=\int_0^t x(\tau)d\tau$$

のサンプル値 $y[k]=y(kT)$ は，

$$y[k]=\int_0^{kT}x(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^{T}x(\tau)d\tau+\int_T^{2T}x(\tau)d\tau+\cdots+\int_{(k-1)T}^{kT}x(\tau)d\tau$$

$$\cong Tx(T)+Tx(2T)+\cdots+Tx(kT)$$

$$=T\{x[1]+x[2]+\cdots+x[k]\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

となり，サンプリング間隔 T を横幅とする“たんざく”の面積の“たし算”，すなわち総和によって近似されます（**図4**）．この“たんざく”の面積の総和のことを，詳しく研究した数学者の名にちなんで，リーマン和と呼びます．

また，式(4)より，

$$y[k-1]=T\{x[1]+x[2]+\cdots+x[k-2]+x[k-1]\}$$

となりますが，式(4)との差を取れば，

$$y[k]-y[k-1]=Tx[k]$$

となり，最終的に，

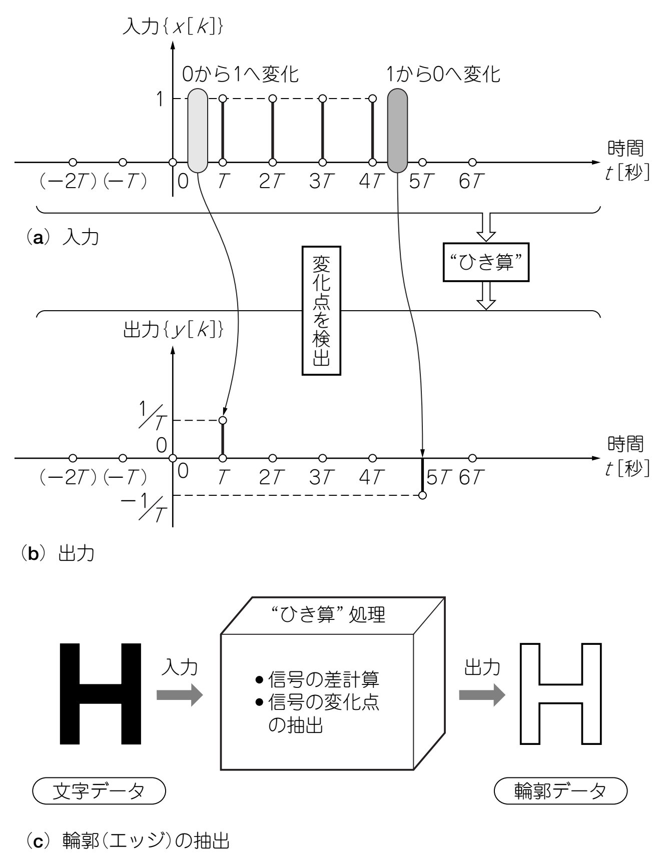

図3　微分は “ひき算” 処理