新・組み込みソフトへの数理的アプローチ
～形式仕様記述をどのように使うか～

第3回
充足問題
――真理表を使いこなす(3)

藤倉 俊幸

はじめに

前回(2009年2月号，pp159-164)は推論としては正しいが結論としては正しくない場合があることを説明した．推論というのは前提から結論に至る考え方や説明の仕方をいい，話の進め方の全体構造に当たる．しかし，前提や結論自身の正しさについては切り離して言及しない．

今回は，前提が正しいとするとどんな結論を得られるのか，また逆に欲しい結論を得るための前提を調べる方法を中心に説明する．

1. 簡単な問題

簡単な例を考えてみる．問題の種類が今までと異なるので，最初に推論を検証する形の問題として扱って，その後充足問題として扱う．このようにすることで問題の型の違いがわかると思う．この例は文献(1)からとった．

アリスまたはベティがダイヤを盗んだ犯人である．
そして，アリスが犯人なら，ベティも犯人である．
さて，誰が確実に犯人であろうか？

今まで同様に命題を立てる．

A：アリスが犯人
B：ベティが犯人

すると，問題文は以下の二つの論理式で表現できる．

A ∨ B
A → B

この問題を，今まで同様に推論の正しさを調べる問題として扱う場合，結論を用意する必要がある．そこで，AとBそれぞれを結論とした，

(A ∨ B) ∧ (A → B) → A

と

(A ∨ B) ∧ (A → B) → B

の二つの推論としての正しさを調べてみる．つまり，問題の枠組みを前回までで説明したものに変更して解く．まずAについて調べる．すでに紹介したprologプログラムを使用すると，**表1**の真理表を得る．この場合，推論として成立しない(Fが一つでも存在するため)．

Bについては，**表2**のようになり，推論として成立する(すべてTだから)．

しかし，これだけでAが間違っていて，Bが正しいと結論づけることはできない．例えば，**表2**からベティが犯人と結論づけたとしても，よく見るとBが偽のときも含まれている．Bが偽の場合を含んだ真理表を示してBが常に成り立つということには無理がある．問題文の「確実に」は，100%という意味で，どのような場合でもということである．そして，「どのような場合」かというと無条件にすべての場合ではなく，前提が成立する場合に100%という意味である．なので，前提が成立する条件を調べる必要がある．実際に調べると**表3**のようになる．

この結果，前提が成立する場合は**表4**の2通りのみであ

表1　アリスが犯人とした場合

A	B	(A∨B)∧(A→B)→A
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

表2　ベティが犯人とした場合

A	B	(A∨B)∧(A→B)→B
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

表3　前提が成立する条件

A	B	(A∨B)∧(A→B)
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	F

表4　前提が成立する場合

A	B
T	T
F	T

ることがわかる．

推論の正しさを検証する場合は，すべての場合を考慮しなければならないが，充足問題を扱う場合は前提条件を満足する範囲ですべての場合を考慮する．ここが，推論検証と充足問題の違いである．それから，推論検証を先に経験すると結論がないと真理表を作れない，あるいは使えないと誤解してしまう人もいるがそのようなことはない．

この範囲で，Bは両方とも（100%）真なので確実に犯人であることがいえる．一方，Aは偽の場合もあるので可能性のみがいえる，あるいは「わからない」といった方がよいかもしれない．よって問題の答えは，「ベティが確実に犯人であることがわかる」となる．充足問題を解く過程では，「わかる」か「わからない」かということと「わかる」の中で「真」か「偽」かの情報が得られる．「わからない」ということも立派な情報である．

推論の正しさを問題にするのではなく，というか推論が正しいのは当たり前の話として，前提から何がいえるのか考える場合は，前提条件を論理式に変換してそれらすべてをANDで結合した真理表を作る．そして，前提が成立している所のみに注目して議論を行えばよい．真理表を作成して全部偽になってしまった場合は，前提条件がきついか矛盾している場合である．逆にすべて真になってしまったら，その前提条件は何もいっていないことになる．

次に結論づけたいことを論理式で表現して，前提条件の真理表から前提が成立するところに入れてみる．このとき，結論を表す論理式がすべて真になれば，その結論は正しいといえる．すべて偽になれば，間違っているといえる．真偽が入り交じったら，どちらともいえない，ようするにわからないことになる．

逆に，結論を先に用意して結論が常に真になるところだけ選び出して，その条件から前提を作ることもできる．例えば，アリスだけを犯人に仕立てあげたいとする．そのときは，（A，B）＝（T，F）の時に真になる論理式を作って，例えば，

$A \land \neg B$

これは，

$\neg (A \rightarrow B)$

と変形できるから，「アリスが犯人ならベティも犯人であるとはいえない」などという訳のわからないことを主張するとアリスは確実に犯人になる．真理表を使えば特定の結論を真にする論理式は自由に作ることができる．真にしたい条件の個々の命題をANDで結んで，条件が複数あったらそれらをさらにORで結ぶと積和標準形という論理式ができる．これが冗長であれば論理圧縮すればよい．論理回路を設計する時も同じようなことをする．

表5　作りたい論理式

A	B	X	
T	T	T	→A∧B
T	F	F	
F	T	F	
F	F	T	→¬A∧¬B

例えば，**表5**のXのようになる論理式を作りたい場合は，まずXが真になっているところをAとBで表現する．A，Bが真の場合はそのまま，偽の場合はその否定をANDで結合する．この場合は，$A \land B$と$\neg A \land \neg B$になる．そして，これらをORで結合した，

$(A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$

が求める論理式になる．横方向は同時に起こる割り当てなのでAND，縦方向は別の場合なのでORと覚えればよい．

表5はよく見ると，XはAとBで真偽値が一致したときに真になる論理式である．つまり，同値関係である．したがって以下のように変形できるはずである．興味があったら証明してはどうだろうか．

$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$

このときに，ド・モルガンの定理などを使って式を誘導するのか，それぞれの論理式の真理表を作って見比べたら同じですというのと，アプローチは二つある．この連載のアプローチは後者である．

2. 天国への道

天国への道という有名なパズルがある．これは，いろいろな本に載っているしWebサイトで検索しても解説ページもいくつかヒットする．どのような問題かというと

「道が二つに分かれていて，一方は天国，一方は地獄に通じている．そこには天使と悪魔が居て，一回だけどちらかに質問することができる．ただし，天使は本当のことを言うが，悪魔は逆のことを言う．また，天使と悪魔の見分けは付かない．どのような質問をすれば良いか」