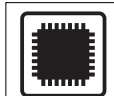


続

実設計に応用できる 演算回路スキルを 身につけよう



デバイスの記事

外村元伸

第2回 キュービック・スプライン補間演算器の設計

連載第1回(本誌2006年7月号, pp.78-84)では、画像の拡大・縮小スケール表示に使われるリニア補間法やキュービック補間法などの演算を取り上げました。リニア補間法は拡大率を上げていくと画像がぼけてしまいます。そこで、補間精度を改善するためにキュービック補間法が用いられています。前回は、キュービック補間法の中でもおもにコンボリューション(convolution)法について説明しました。コンボリューション法は、完全に解けていない方程式の未定係数を経験値で補っているという不自然さがあることを指摘しました。今回は、もう一つのキュービック補間法であるスプライン(spline)法を説明します。(筆者)

前回説明したコンボリューション法に対して、スプライン法は数学的に(厳密に)定義されています。そのため、拡大率が大きくなるにつれてスプライン補間による表示のほうがコンボリューション補間よりも勝ってきます^{注1}(写真1)。

スプライン法に関する書籍は数学書としての傾向が強く、今のところ画像の拡大に応用するための適当な解説書が見当たりません^{注2}(p.122のコラム「B-スプラインのさまざまな表現形態」を参照)。演算器の構成にまで立ち入ったものは皆無と思われる。そこで、ここではあくまでも画像の拡大スケールにスプライン法を応用することを目的として説明を進めます。また、具体的な演算器の構成につい

注1: 自然画像は人工画像と比べてシャープに撮影するのが難しい。しかし、ゾーンプレートと呼ばれる人工的に描画した画像を用いて各種補間法に基づく画像の拡大スケールを比較すると、スプライン法とコンボリューション法の違いがよくわかる(連載第1回を参照)。

注2: 専門的なスプライン補間法については、参考文献(1),(2)を参照。

ても言及します。あいかわらず数式の多い説明になっていきますが、スプライン法の画像の拡大表示への応用について、具体的に式を示したものはほかにはないと思います。

1. キュービック・スプライン法の設計手法

連載第1回で説明したコンボリューション法は、3次曲線間の1次微係数までの一致をとるものでした。一方、スプライン法では2次微係数まで一致させ、方程式を完全に解きます。キュービック・スプライン法では正規化のため、 $\varphi(0)=2/3$ とします。8個の未定係数を解くための連立方程式は、

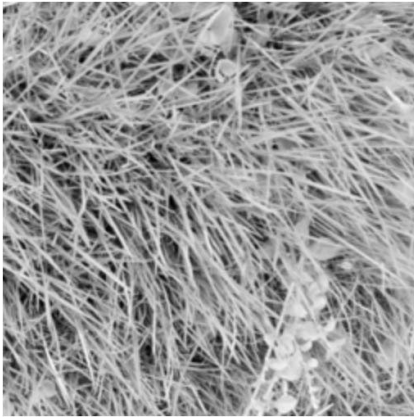
$$\begin{cases} 2/3 = \varphi(0) = d_1 \\ \varphi(1) = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \\ 0 = \varphi(2) = 8a_2 + 4b_2 + 2c_2 + d_2 \\ 0 = \varphi'(0) = c_1 \\ \varphi'(1) = 3a_1 + 2b_1 + c_1 = 3a_2 + 2b_2 + c_2 \quad \dots\dots(1) \\ 0 = \varphi'(2) = 12a_2 + 4b_2 + c_2 \\ \varphi''(1) = 6a_1 + 2b_1 = 6a_2 + 2b_2 \\ 0 = \varphi''(2) = 12a_2 + 2b_2 \end{cases}$$

となり、完全に解けます。ここで、 $\varphi(\pm 1) = 0$ ではないことに注意してください。

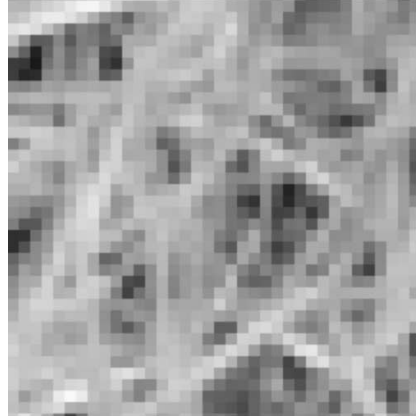
ここでは、キュービック・スプライン法の重み関数 $\varphi(x)$ を $\beta^3(x)$ $\varphi(x)$ と記述することにします。これは、 $\varphi(x)$ が3次式であることを示すため、そしてこの関数がB(basis)-スプライン関数と呼ばれているためです。 β^3 は次のように表せます。

KeyWord

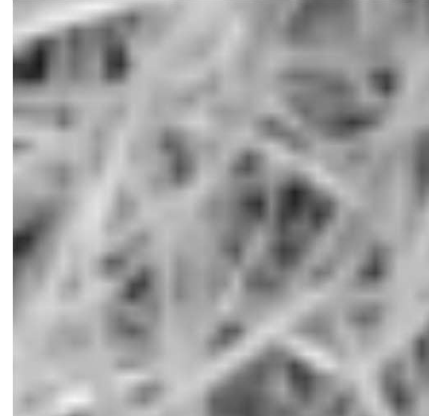
リニア補間法, キュービック補間法, コンボリューション法, スプライン法, B-スプライン, 鏡像, 線形方程式, 前進消去, 後退代入, ガウス消去法, キャリ・セーブ



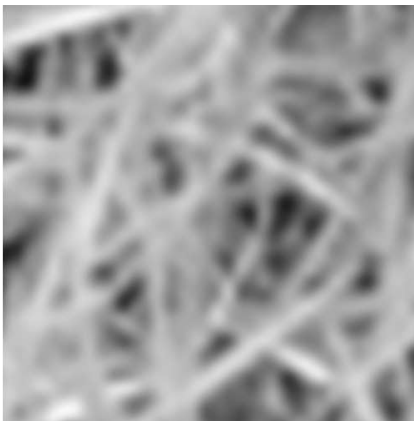
(a) 原画像



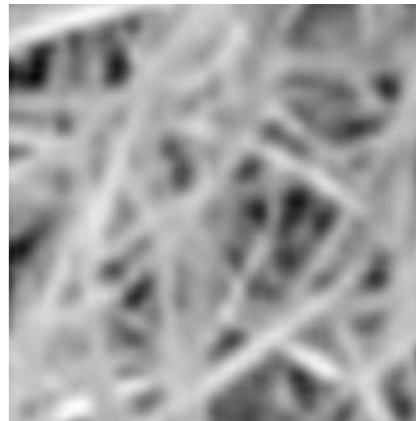
(b) 最近傍選択



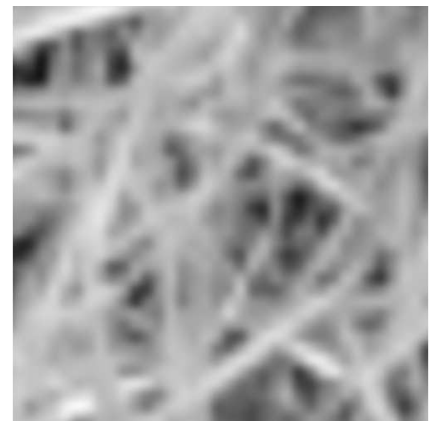
(c) バイリニア



(d) バイキュービック・スプライン6点



(e) バイキュービック・スプライン4点



(f) バイキュービック・コンボリューション

写真1 各種補間法に基づく画像拡大スケールリング表示結果の比較

各辺の拡大率は7倍，面積拡大率は49倍

$$\beta^3(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{1}{2}|x|^2(2-|x|), & 0 \leq |x| < 1 \\ \frac{1}{6}(2-|x|)^3, & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & 2 \leq |x| \end{cases} \dots\dots\dots(2)$$

ここで、 c_k を補間係数とし、画素位置 $k = 0$ を基準とすると、補間区間 $0 \leq x < 1$ の補間値 $f(x)$ を求めるキュービック・スプライン補間式は、次の式(3)によって求められます。

$$f(x) = \sum_{k=-1}^2 c_k \beta^3(x-k) \\ = c_{-1} \beta^3(x+1) + c_0 \beta^3(x) \\ + c_1 \beta^3(x-1) + c_2 \beta^3(x-2) \dots\dots\dots(3)$$

式(2)から次式が得られます。

$$f(x) = \frac{1}{6} \left((-c_{-1} + 3c_0 - 3c_1 + c_2)x^3 \right. \\ \left. + (3c_{-1} - 6c_0 + 3c_1)x^2 \right. \\ \left. + (-3c_{-1} + 3c_1)x + (c_{-1} + 4c_0 + c_1) \right) \dots\dots\dots(4)$$

ここで、画素位置 k に対する画素値を $f_k = f(k)$ とします。式(3)と式(4)は $k = 0$ を基準とするときの式ですが、画素位置 $k = -1, 1, 2$ を基準にする場合も同様にして、

$$f_k = \frac{1}{6} (c_{k-1} + 4c_k + c_{k+1}) \quad (k = -1, 0, 1, 2) \dots\dots\dots(5)$$

となります。ただし、4個の補間係数 c_{-1}, c_0, c_1, c_2 の外にある c_{-2} と c_3 は、 $c_{-2} = c_0, c_3 = c_1$ のように境界条件をつけて、鏡像であると考えます。一部の文献などでは、 $c_{-2} = c_3 = 0$ として境界条件を無視していますが、画質的には鏡像と考えるほうがよいようです。これにより、