第3章

位相と複素数が出てくるとわからない

❖

なぜ電気/無線数学には複素数が出てくるのでしょうか．
ここで挫折する人も多いかもしれません．
本章では複素数を交流回路とからめてわかりやすく説明し，以降の導入にします．
いきなり複素数ありきで説明されるから理解したくなくなるわけで，
本章では「なぜ複素数が必要なのか」という
素朴な疑問から話を進めていきたいと思います．

❖

3-1 交流信号と位相をどうやって示そうか

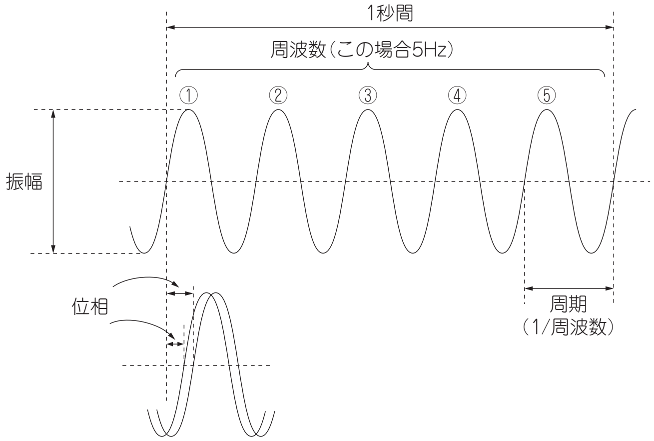
●「交流」っていうけど，「交流」って何？

あたりまえのようですが，交流回路は直流回路以外のものです．電流の流れが行ったりきたりする流れ，電圧がプラスとマイナスを交互に繰り返すもの，それが**交流**です．現実のモノとして見る交流回路は，電子回路でいうとオーディオ回路，ビデオ回路，高周波回路，その他もろもろ……ほぼすべてが交流回路であるといえるでしょう．つまり電子回路設計をするには，この交流回路の考え方の理解は必須なのです．

● 交流信号は振幅と周波数と位相

図3-1のように交流信号は三つの要素を持っています．信号の大きさを示す**振幅**，1秒間にどれだけ電圧や電流が切り替わるかを示す**周波数**(この逆数が1つの波の時間を示す**周期**)，そして切り替わりのタイミングを示す**位相**です．

位相は交流信号と複素数とに深く関わってくる概念です．本書では「切り替わりのタイミングを示す」という一風変わったとらえかたをしていますが，これから位



［図3-1］ 交流信号は周波数と振幅と位相

相，位相の角度，そして複素数の理解への道筋のスタートとして，まずこのように示し，以降説明していきます．

▶ 電圧と電流と位相関係：タイミングの違いが位相の違い

異なるタイミング同士のペアとして，**図3-2**のように電圧と電流で考えてみます．またそれぞれサイン波であると考えます．電圧を基準としてみると，**図3-2**(a)は電圧と電流が同じタイミング，**図3-2**(b)は電流が1/4周期進んでいます．一方**図3-2**(c)は電流が1/4周期遅れています．

重要なことですが，このように**交流信号では，電圧と電流はまったく同じ位相になっているわけではなく，どちらかが進んだり遅れたりします**．このことは改めて本章3-2節に詳しく説明します．

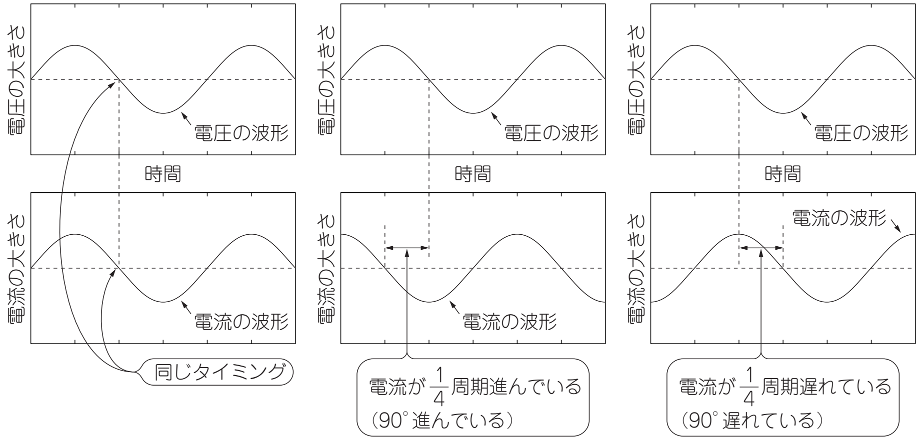
さて，ここで1周期を360°と考えると，**図3-2**(b)は電流が90°進んでおり，**図3-2**(c)は電流が90°遅れていると表せます．さらに**度数法**での360°という大きさを，**弧度法**の**ラジアン表示**で$0 \sim 2\pi$としてみると，**図3-2**(b)は電流が$\pi/2$進んでおり，**図3-2**(c)は電流が$\pi/2$遅れていると表せます(言い方を変えれば，$-\pi/2$ということ)．

このタイミングの違いが，位相の違いそのものです．

▶ 周波数もラジアンとして位相と一緒に考えてみると

一方，上記の**図3-2**をコサイン波※1 cos[角度]として表したいと考えると，位相と

※1：ここでは本節後半の説明との統一を取るため，サイン波ではなくコサイン波として説明する．



(a)　(b)　(c)

[図3-2]

周波数の情報を一緒に，角度で示す必要があります．まず式で表すと※2，

$$s(t) = [振幅] \times \cos(2\pi \times [周波数] \times t + [位相]) \quad \cdots\cdots (3\text{-}1)$$

$$([角度] = 2\pi \times [周波数] \times t + [位相])$$

となるのですが，ここで**周波数**fに対して2πと時間tが掛け合わされています．これが時間がtのときの角度になるのです．たとえば周波数1kHz(1周期は1msec)で，$t = 0.25$msecのとき，$f \times t = 0.25$なので，この部分は$\pi/2$になります．1周期の1/4だけ経ったときに角度ぶんが$\pi/2$，つまり90°になっていることがわかりますね．

　また振幅はcosの外に出ており大きさになり，さらに**位相**はただ足し合わされているだけです．位相自体が角度の意味だからです．式(3-1)はより専門書的に書くと，

$$s(t) = A\cos(2\pi ft + \theta) \quad \cdots\cdots (3\text{-}2)$$

と書きます．ここでAが振幅になり，fが周波数になり，θは位相になります．ギリシャ文字θが出てきましたが，ただ位相を一般的にこの記号で表しているだけな

※2：$s(t)$としてsを使っているのは，Signalという意味を込めているため．

ので，たとえばXでも$isou$でも良いともいえます(これだと逆に他人にわからないので一般用としては使えないが)．

また第4章以降でも$2\pi ft$が多用されますが，$2\pi f = \omega$(角周波数と呼ぶ．単位はラジアン/sec)としてωで表していきますので**注意して**ください．

▶ 一応はこれで全部

ここまでの説明で，交流信号と位相関係は全部表せます．「では今日の授業は終わり！」なのですが，この式だと交流回路を計算するのがとても面倒になってしまうのです．理由を次から説明します．実はここからが本題です．

● クイズ：交流信号に何かを掛けたり割ったりして，オームの法則的に位相の成分を変えることができるか

第2章で示したように，オームの法則は電圧と電流と抵抗の関係を，それぞれ掛け算と割り算で計算できるようになっています．それではちょっとクイズです．

式(3-2)はコサイン波の電圧と電流を表すために用いることができます．ではこの式に何かを掛けたり割ったりして，**オームの法則的に位相の成分を変える**ことができるでしょうか．つまり，

$$A\cos(2\pi ft + \theta_{new}) = A\cos(2\pi ft + \theta) \times [\text{何かの関数}] \quad \cdots\cdots (3\text{-}3)$$

として「θ_{new}を作れるか？」ということです．

もしこれができれば，位相の異なる電圧と電流(と抵抗)の関係を，オームの法則的に掛け算と割り算で計算できるのです．この**何かの関数**を考えだすのが，実は以降の本章3-2から3-3へかけての結末なのです．ではこのクイズの答えまでたどり着いてみましょう．

3-2 一旦周波数を忘れて，振幅と位相，特に位相に目を向ける

それではここで周波数のことを忘れて，振幅成分と位相成分を考えてみましょう．周波数成分を考えなくて良いのは，上記の「タイミング」の説明のように，「切り替わり」が周波数であり，タイミング自体には**関係ない**からです．また計算上でも，周波数自体は変わることがないからです(計算に影響を与えない)．

この振幅と位相成分を**極座標**というもので表してみます．特に位相成分が重要です．

● 交流信号と位相との関係：何かを基準にすればよいだけ

「位相は電圧と電流の波形のタイミングの違いです」，「それはわかった．では，何を基準タイミングにして考えればよいのか」

この質問は当然でしょう．**実は何を/どちらを基準にしてもよい**のです．何かのタイミング（つまり位相）をゼロとして，それからの差分として考えればよいのです．とはいえ一般的には，**電圧を基準**として考えることが多いといえるでしょう．

また第4章4-2に示すように，強電の三相交流などでは，位相の異なる複数の電圧が使われます．この場合も同様にどれかを基準として，それからの相対的な位相量として考えればよいのです．

● 極座標で位相を示す

極座標についてまず説明します．**図3-3**は極座標の例です．極座標は**X軸のプラス方向を角度ゼロ**として，中心に対しての**角度**で表すようになっています．また**大きさ**は中心からの長さとして表します．つまり，

- この**角度**が式(3-2)の**位相**θになる
- **大きさ**が式(3-2)の**振幅**Aになる

大きさのことは，ここでの説明では無視してもらってもかまいませんが，この大きさは，本書のこれ以降，振幅と位相を考えていくうえで大変重要なものです．

図3-3では振幅はA(1でも3でも良いのだが，なんらかの大きさということ)，位相を$\theta=\pi/4$(45°)として示しています．

ややこしい話ですが，より厳密いうと図にはX，Y軸が表記してあり，円で示される**極座標**の部分と，X，Yの**直交座標**の部分が一緒に表記されています．実際の図としてはこの**直交座標**の軸で表記されるのが普通です．

● 極座標で示した位相をもとにして実数と虚数で考える

図3-3のようにX軸(横軸)とY軸(縦軸)を考えると，X軸は$A\cos\theta$になります．Y軸は$A\sin\theta$ですね．つまりこの座標位置は$(A\cos\theta,\ A\sin\theta)$と表すことができます．$\theta$をもとにしてX，Y直交座標上の位置として表せます．

ここでX軸とY軸はそれぞれ別の軸です．以降に説明するようにX軸は**実数**になります．次にY軸を$j=\sqrt{-1}$という**虚数**の考え方を使って[※3]特殊な形の大きさで

※3：本来の数学ではjではなくiが用いられる．いっぽう電気数学でjが用いられるのは，電流がI，iなのでそれとの混乱をさけるためである．