第1章 信号数学の準備

近年，地上/BS/CSディジタル放送を始めとして，インターネット，ADSL，ディジタル通信，iモード，携帯電話などでは，ありとあらゆる情報がすべてディジタル・データとして統合され，多種多様のサービスが提供されてもいる．いずれのサービスも，ディジタル信号によってもたらされた恩恵でもある．

こうしたサービスにおいては，信号圧縮，信号回復(信号復元)，雑音除去，信号抽出などの種々の信号処理が必ず含まれている．最近の信号処理は，旧来のアナログ的な処理から，演算論理に基づくディジタル的な処理にとって代わりつつある．とくに離散数学に根差した計算アルゴリズムは，信号処理に携わっている技術者にとって必要不可欠のものであり，その本質をしっかりと見据えておかなければならない．

ところで，「信号数学」と聞いて「はてはて，何だろ？」と思われた方がたくさんおられるかもしれない．電気信号，ディジタル信号，アナログ信号，制御信号，テレビジョン画像信号，音声信号など，私たちの身近には“信号”という2文字が含まれた言葉は枚挙にいとまがない．

本書は，「これから信号処理を勉強したいのだが，どのように進めていったらよいのか，皆目見当がつかない人」とか，「予備知識がないので，どの参考書を読んでもチンプンカンプンで理解できず困っている人」――そんな人のお役に立てればとの一念から，信号処理関連の数学をわかりやすく具体的に解説したものである．

本章では，第2部からのフーリエ変換に関する本格的な解説に先駆け，おもに信号処理の概要，ディジタル信号の正規直交基底ベクトルによる表現，相関関数などについて説明する．その際，“数学”的な難しい説明はほどほどに，信号数学のもつ“とっつきにくさ”を解消してもらうことを最大の目標にして，わかりやすい説明を心がけており，信号数学の“ココロ(心)”がつかめるように配慮している．

なお，第1部の内容は，信号数学的なセンスを身に付けてもらう上でのウォーミング・アップになるものなので，しっかりと読み進めていってもらいたい．

1.1　信号処理とは

一般に，信号とは情報を物理的に具現化したものである．例えば，温度，気圧，騒音量などの計測信号，音楽とか電話音声などの音響信号，テレビ，アニメ，指紋などの画像信号など多種多様である．これらの信号は，いずれも物理量として計測（ある物理量を数値で表現）可能であり，通常適当なセンサによって電気信号に変換される．現在では，味や匂いなどの信号も電気信号に置き換えることが可能になりつつある（**図1-1**）．

他方，携帯電話で音声信号のやり取りをしたいのだけれど，雑音ばかりが大きくて肝心の音声がよく聴き取れないとか，テレビジョン画面にゴーストが出たりして不鮮明で見にくいときなどに，余計な雑音をなるべく抑えて必要な意味のある信号のみを取り出したい，あるいは信号が明瞭になるように改善したい――このようなときに信号処理，信号数学が役に立つ．

このように，信号処理の対象とする信号の中に多種多様の信号成分が含まれていて，その中から必要な成分と不必要な成分とに分別したいときには，

① どのような物理的な性質をもっているのか

② どのような成分が含まれているのか

といったことを知ることにより，必要な成分のみを抽出したり処理することが可能になる．

しかし，対象となる信号の性質や成分がよくわかっていないときには，まず信号のもつ特性と物理的な性質との対応を調べなければならない．つまり，「信号の解析，分析」，わかりやすく言い換えれば，「信号の身元調査」が必要になるのである．そんなときにも「信号処理の理論」，まさしく本書のテーマである「信号数学」の真価が問われることになる．信号を解析することによって，対象となる信号の特徴を浮かび出させることができるようになるわけである（**図1-2**）．

また，信号処理の技術は信号の合成にも大いに力を発揮する．最近の音声読み上げソフトは音声合成の技術を使っており，音声の成り立ちがわかれば，それを利用して合成することも可能になる．こんなときにも信号処理の考え方が役立っている．

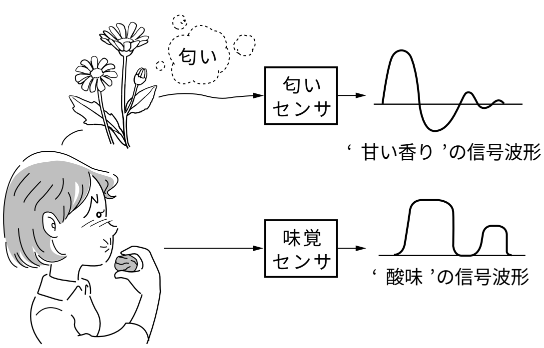

図1-1　いろいろな信号変換

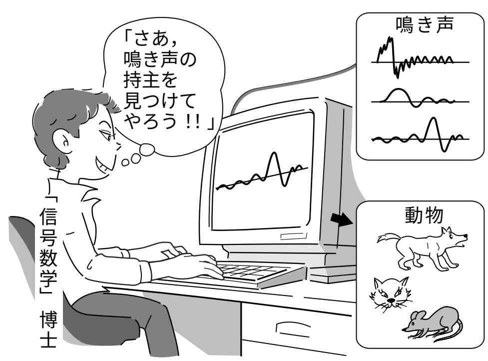

図1-2　「信号数学」は信号の身元調査人

つまるところ，信号処理においては数学的な処理を必ずともなうことになるわけで，「信号数学」の真髄，数式の物理的な考え方や意味を中心に身につけておく必要がある．

1.2　信号処理の例

それでは，信号処理の具体例を実際のデータの処理のようすを示しながら説明していくことにしよう．

● **信号波形の平滑化処理**（不規則性雑音の除去，大まかな信号の変化の把握）

例えば，音声信号に含まれている微量のノイズを取り除いたり，風速の時々刻々の細かな揺らぎ変動を取り除いて緩やかで大まかな風速の変化を見たいときには，信号波形を滑らかにすればよい．この処理は信号波形の「平滑化」といい，平均値を計算することと等価である．

風速の変動例では，瞬時風速の一定の時間範囲における平均値を計算して風速を求めればよく，この操作によって滑らかな曲線のグラフが得られることになるだろう．この操作は「移動平均をとる」といい，注目する時刻の前後のある時間範囲の風速に基づいて平均値を求めていくのである（**図1-3**）．

この「移動平均をとる」処理の数式的な表現を示しておこう．いま，ディジタル信号が測定データ系列として，

$$\{\cdots,\ x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\} \quad \cdots\cdots(1)$$

で与えられているとする．このとき，注目するデータ点の値をiとし，その前後のK個のデータ，

$$\underbrace{\overbrace{x_{i-K},\ x_{i-K+1},\ \cdots,\ x_{i-1}}^{K\text{個}},\ x_i,\ \overbrace{x_{i+1},\ \cdots,\ x_{i+K-1},\ x_{i+K}}^{K\text{個}}}_{(2K+1)\text{個}} \quad \cdots\cdots(2)$$

つまり，全体では$(2K+1)$個のデータの平均値をy_iと表して，

$$y_i=\frac{1}{2K+1}\left(x_{i-K}+x_{i-K+1}+\cdots+x_i+\cdots+x_{i+K}\right) \quad \cdots\cdots(3)$$

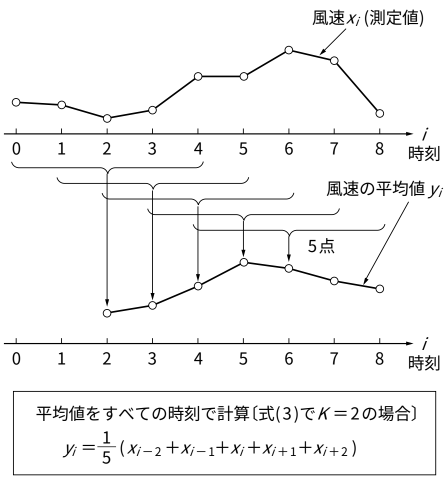

図1-3　移動平均のとりかた（5点，K=2の場合）

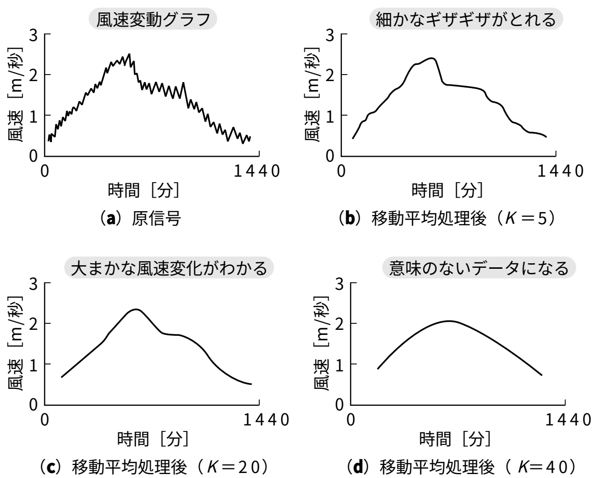

図1-4　移動平均処理による平滑化

のように計算するのである．この式は，総和の記号を用いて，

$$y_i = \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^{K} x_{i+k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

のようにも表せる．

図1-4は，1分ごとの平均風速を丸一日24時間分の変化のようすを表したグラフである．これに移動平均の処理をかけてみよう．考慮する点（時間）の範囲を与えるKの値が大きくなるにしたがって，次第に風速の変化波形も滑らかになっていくことが，この図からわかる．Kの値が小さすぎると平滑化の効果が弱くなり，大きくし過ぎると風速の変化を読み取りにくくなってしまう．

このように「移動平均をとる」処理は，観測データから激しく振動する信号の成分（高い周波数成分）を除去するということを意味している．このとき，除去する周波数の範囲はKの値の大小によってコントロールすることができる．

また，激しく振動する信号として，**図1-5**のような雑音（時間的に不規則に変化する信号で，不規則性信号ともいう）が重畳した測定データを考えてみると，「移動平均をとる」処理は雑音を除去する機能をもっている．つまり，平均値をとるという簡単な計算で，アナログ信号処理回路の平滑化回路（**図1-6**）の機能をディジタル演算回路で肩代わりできることが容易に理解できる．

別な見方をすれば，「移動平均をとる」処理は次のような性質を巧みに利用したローパス・フィル

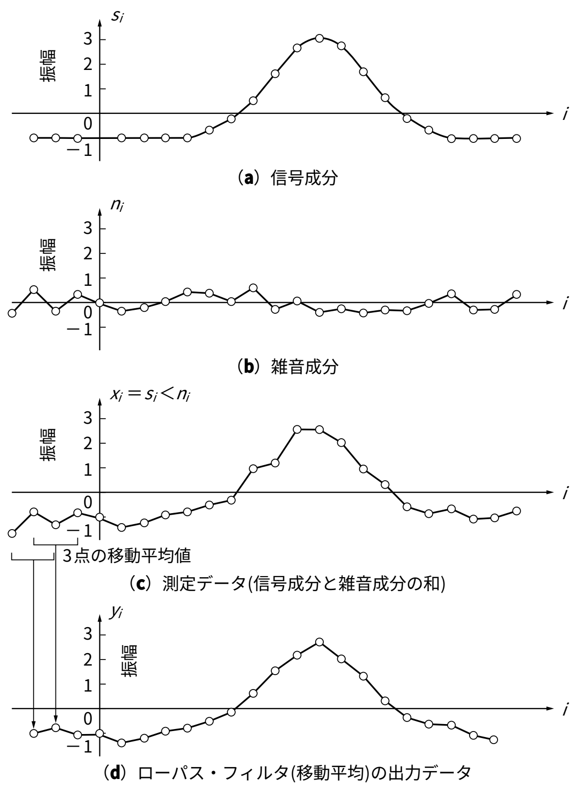

図1-5
移動平均処理による雑音除去
（3点，K=1の場合）