第11章 さらに進んだディジタル信号処理

第10章までは，ディジタル信号処理の基礎的な事項や中心的な部分について述べてきた．しかし，ディジタル信号処理はこれだけではなく，その先にさらに広い世界が広がっている．この章では，その先にさらに進んだディジタル信号処理としてどのようものがあるのかということに関心のある読者のために，その一部として複素信号処理と適応フィルタについて取り上げる．なお，これらについて，本格的に説明しようとするとかなり紙面を使い，とくに適応フィルタの場合はそれだけで一冊の本が書けるほどの内容を含んでいるため，この章では簡単に紹介するにとどめる．

11.1 複素信号処理

この節では最初に，複素信号の一種である解析信号とそれを作るためのヒルベルト変換について説明する．その後，解析信号を使う応用として，周波数変換器，AM復調器，PLLについて紹介する．

(a) 解析信号とヒルベルト変換

◆ 解析信号

解析信号(analytic signal)とは，複素信号(complex signal)の特別な場合で，負の周波数成分をもたない信号として定義される．これだけでは雲をつかむような話だと思うので，具体的な例で考える．まず，次のような角周波数$\omega_0(\omega_0>0)$をもつ実信号$f_1[n]$があるとする．

$$f_1[n]=A\cos[\omega_0 n] \qquad \cdots\cdots(11\text{-}1)$$

この信号に対して，位相が$\pi/2$だけ遅れた実信号を$f_2[n]$とすると，次のように表すことができる．

$$f_2[n]=A\cos[\omega_0 n-\frac{\pi}{2}]=A\sin[\omega_0 n] \qquad \cdots\cdots(11\text{-}2)$$

この二つの信号から，$f_1[n]$を実部に，$f_2[n]$を虚部にもった複素信号$f[n]$を考えると，次のようになる．

$$f[n]=f_1[n]+jf_2[n]=A\cos[\omega_0 n]+jA\sin[\omega_0 n] \qquad \cdots\cdots(11\text{-}3)$$

この式を，オイラーの公式を使って複素指数関数で表現すると，

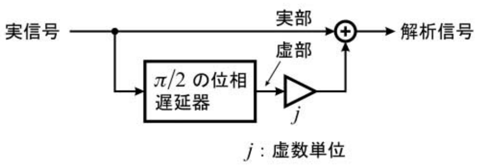


図 11-1　実信号 $f[m]=A\exp[j\omega_0 n]$ から解析信号を生成する方法

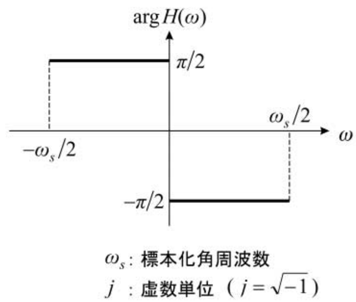


図 11-2　離散的ヒルベルト変換器の位相特性

$$f[n]=A\exp[j\omega_0 n] \qquad \cdots\cdots (11\text{-}4)^{注1}$$

になる．この式は正の角周波数である ω_0 を含むが負の角周波数 $-\omega_0$ を含まないので，$f[n]$ は負の周波数成分[注2]をもたない信号であるということができる．この信号が解析信号ということになる．

一般に，実信号から解析信号を生成するためには，その実信号に対して位相が $\pi/2$ だけ遅れた信号を作り，それを虚部にもってくればよいということになる．したがって，原理的には**図 11-1** に示すシステムにより，実信号から解析信号を生成することができる．

◆ ヒルベルト変換

位相が $\pi/2$ だけ遅れた信号はヒルベルト変換器（Hilbert transformer）で生成することができる．ヒルベルト変換器[注3]は次に示す周波数特性 $H(\omega)$ をもっている．

$$H(\omega)=\begin{cases}-j, & 0<\omega<\omega_s/2\\ j, & -\omega_s/2<\omega<0\end{cases} \qquad \cdots\cdots (11\text{-}5)$$

ここで，ω_s は標本化角周波数である．つまり，ヒルベルト変換器とは，振幅特性は周波数によらず一定で，位相特性は正の周波数領域では位相が $\pi/2$ 遅れ，負の周波数領域では位相が $\pi/2$ 進むようなフィルタであると考えることができる[注4]．ヒルベルト変換器の位相特性を**図 11-2** に示す．**図 11-2** に示す特性と厳密に一致するヒルベルト変換器は理想的ヒルベルト変換器と呼ばれ，**コラム Q** で説明しているように，実際に実現することはできない．しかし，扱う周波数範囲を限定すれば，ヒルベ

注1：オイラーの公式を使うと，式(11-1)，(11-2)は次のようになる．

$$f_1[n]=A\{\exp[j\omega_0 n]+\exp[-j\omega_0 n]\}/2$$
$$f_2[n]=-jA\{\exp[j\omega_0 n]-\exp[-j\omega_0 n]\}/2$$

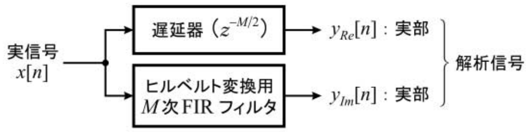
いずれの式も $-\omega_0$ を含むので，負の周波数成分をもっていることになる．これらの式を式(11-3)に代入すると，次のようになる．

$$\begin{aligned}f[n]&=A\{\exp[j\omega_0 n]+\exp[-j\omega_0 n]\}/2+j\left[-jA\{\exp[j\omega_0 n]-\exp[-j\omega_0 n]\}/2\right]\\&=A\exp[j\omega_0 n]\end{aligned}$$

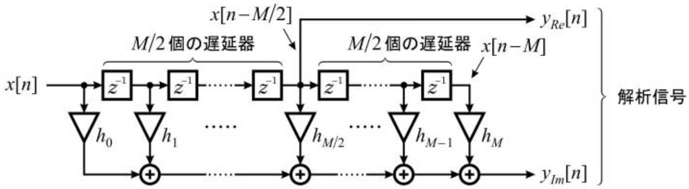
注2：負の周波数については**第 9 章**の**コラム O** を参照のこと．

注3：ディジタル信号処理で扱う場合は離散的ヒルベルト変換器ということになるが，本文中では単にヒルベルト変換器と呼ぶ．

注4：$-j=\exp(-j\pi/2)$，$j=\exp(j\pi/2)$ であるから．



（**a**）基本的な構成



（**b**）M次のFIRフィルタを用いるヒルベルト変換器による構成

図11-3　実信号を解析信号に変換するシステムのブロック図

ルト変換器を十分な精度で近似することは可能になる．

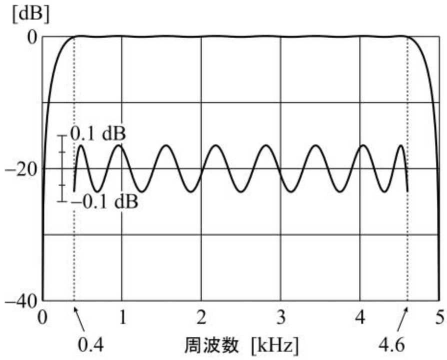
ところで，本来，式(11-5)の特性をもつヒルベルト変換器は遅延を発生しない．しかし，実際にはヒルベルト変換器としてFIRフィルタを使う．そのため，リアルタイム処理を前提とすると，M次のFIRフィルタをヒルベルト変換用フィルタとして使った場合，$M/2$の遅延が発生する．そのため，虚部は実部に対して$M/2$の遅延を生じることになる．そこで，これを補正するため，実部も$M/2$の遅延を生じる遅延器を通して出力する必要がある．したがって，実信号を解析信号に変換するシステムの基本的な構成は**図11-3**(**a**)のようになる．この図で$z^{-M/2}$は単位遅延素子を$M/2$個縦続接続したものである．このシステムにより，実信号から解析信号の実部および虚部を求めることができる．

この構成をよく見ると，ヒルベルト変換用フィルタを直接形のM次のFIRフィルタで構成した場合，フィルタの$M/2$段目の遅延器の出力に現れる信号が遅延補正したものと同じことがわかる．したがって，この場合は独立した遅延器による補正は不要になる．そこで，実信号から解析信号を作るためのシステムの具体的な構成は**図11-3**(**b**)のようになる．

なお，解析信号を作る場合，$M/2$が整数でない場合は，標本化間隔の半分の遅れをもった遅延器が必要になるため，構成が難しくなる．そこで，通常はヒルベルト変換用フィルタの次数Mは偶数にする[注5]．

ヒルベルト変換用フィルタの係数は，**第6章**の付録で紹介したプログラムの中では，Parks-McClellanによるアルゴリズムのプログラムで求めることができる．このプログラムで設計したときに，与えたパラメータと設計されたフィルタの仕様の例を**表11-1**に示す．また，求められた係数に対応する振幅特性を**図11-4**に示す．振幅特性は0.4kHz ～ 4.6kHzの範囲で，0dBからの偏差が±0.07dB以内であることがわかる．なお，この図には位相特性を示していないが，0～5kHzの範囲で，

注5：M次のFIRフィルタの係数の個数は$M+1$になる．したがって，通常ヒルベルト変換用フィルタの係数の個数は奇数になる．



（**a**）振幅特性

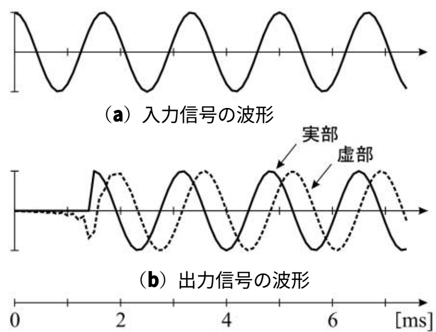
```
h[ 0] = -h[30] = -0.0089772
h[ 1] = -h[29] =  0.0000012
h[ 2] = -h[28] = -0.0141162
h[ 3] = -h[27] =  0.0000009
h[ 4] = -h[26] = -0.0248206
h[ 5] = -h[25] =  0.0000000
h[ 6] = -h[24] = -0.0409581
h[ 7] = -h[23] =  0.0000001
h[ 8] = -h[22] = -0.0659163
h[ 9] = -h[21] =  0.0000003
h[10] = -h[20] = -0.1083673
h[11] = -h[19] =  0.0000008
h[12] = -h[18] = -0.2003786
h[13] = -h[17] =  0.0000001
h[14] = -h[16] = -0.6325985
h[15] = -h[15] =  0.0000000
```

（**b**）係数

図11-4　Parks-McClellan法で設計されたヒルベルト変換用フィルタの振幅特性と係数の例

表11-1　図11-4のヒルベルト変換用フィルタを設計した際に与えたパラメータと得られたフィルタの仕様

設計方法	Parks-McClellan 法
次数	30 次
標本化周波数	10 kHz
下側帯域端周波数	0.4 kHz
上側帯域端周波数	4.6 kHz
フィルタの種類	ヒルベルト変換器
通過域のリップル	0.07005805 dB



（**a**）入力信号の波形

（**b**）出力信号の波形

図11-5　図11-3のシステムで，図11-4に示す特性のヒルベルト変換用フィルタを使った場合の入出力波形

正確に$\pi/2$の遅れになる．

この係数を使ってヒルベルト変換器を作り，これにより生成された解析信号の例を**図11-5**に示す．この図から，虚部が実部に対して$\pi/2$，つまり1/4周期遅れているようすを見ることができる．なお，出力波形の初めの部分で，波形が正弦波になっていないのは，フィルタの過渡現象の影響である．

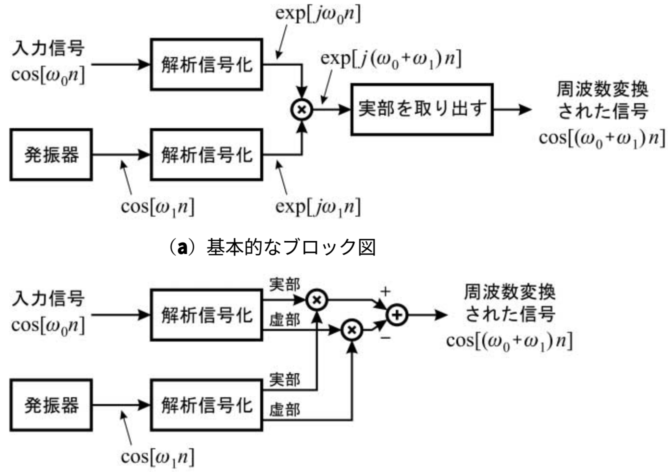
（b）複素信号処理の応用１ － 周波数変換器

解析信号を利用すると，周波数変換器を簡単に作ることができる．角周波数がω_0である解析信号を$\exp[j\omega_0 n]$とする．この角周波数を$\omega_0+\omega_1$に変換したい場合は，次のような乗算を行えばよい．

$$\exp[j(\omega_0+\omega_1)n]=\exp[j\omega_0 n]\cdot\exp[j\omega_1 n] \quad \cdots\cdots(11\text{-}6)$$

実信号に対して周波数変換を行う場合は次のような手順になる．最初に実信号を解析信号化する．次に，この信号に$\exp[j\omega_1 n]$を乗算する．最後に実部を取り出す．以上をまとめると周波数変換器のブロック図は**図11-6**（**a**）のようになる．

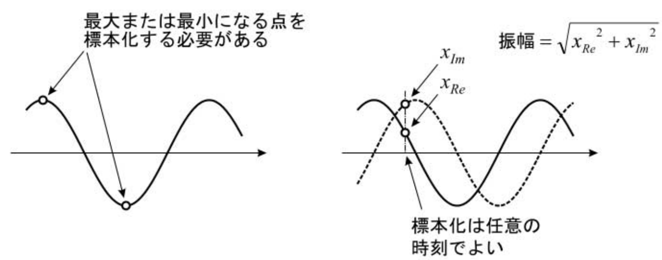
この処理では出力の虚部は結局のところ使われないので，これを計算するのは無駄になる．そこ



(**a**) 基本的なブロック図

(**b**) 不要な計算を省略した場合のブロック図

図11-6　ヒルベルト変換器による解析信号化器を用いる周波数変換器の構成



(**a**) 実信号の場合　　(**b**) 解析信号の場合

図11-7　振幅の測定方法

で，出力の虚部を計算しないようにするため，式(11-6)の実部を計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{\exp[j(\omega_0+\omega_1)n]\} &= \mathrm{Re}\{\exp[j\omega_0 n]\cdot\exp[j\omega_1 n]\}\\ &= \mathrm{Re}\{\exp[j\omega_0 n]\}\cdot\mathrm{Re}\{\exp[j\omega_1 n]\} - \mathrm{Im}\{\exp[j\omega_0 n]\}\cdot\mathrm{Im}\{\exp[j\omega_1 n]\}\end{aligned} \quad\cdots\cdots(11\text{-}7)$$

したがって，周波数変換器は**図11-6**(**b**)に示すブロック図のように構成することもできる．

(c) 複素信号処理の応用2 ― AM復調器

信号処理を行う際に解析信号を使うといろいろな利点がある．その一つに，振幅を瞬時に知ることができるという点がある．**図11-7**には実信号と解析信号それぞれについて，その振幅を測定する方法を示す．ただし，信号に直流分は含まれていないものとする．実信号の場合は信号の値が最大になる時点または最小になる時点で標本化しないかぎり，その振幅を正確に求めることができない．したがって，振幅を正確に求めるためには信号の1/2周期以上を観測する必要がある．一方，解析信号の場合は任意の時点で標本化した値からただちに振幅を知ることができる．

解析信号から振幅を知るためには三角関数の $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ という性質を使う．つまり，任意の時