第3章 DSPシミュレータで体感するディジタル信号処理の世界

ディジタル信号処理は，「体感すれば興味をもってもらえる」ということが筆者らの経験からわかってきました．そこで前章では，DSPシミュレータにより数値データ(ディジタル信号)から音を生成することを体感してもらいました．

なんと驚くべきことに，四則計算(＋，－，×，÷)だけで音階や雑音を作成したり，ノコギリ波の音を聴いたり，ピアノを弾いたりすることができるのです(**図3.1**)．まずは，ディジタル信号処理の新しい世界に足を踏み入れてもらったわけですが，どのような感想を持たれたでしょうか．おもしろいとか，楽しいと思ってもらえれば大成功なのですが･･･．

これから先は，DSPシミュレータを用いて，ディジタル信号処理の基本となる信号発生プログラム，信号計測器のオシロスコープやスペクトラム・アナライザ(通称スペアナ)を作成し，実行してい

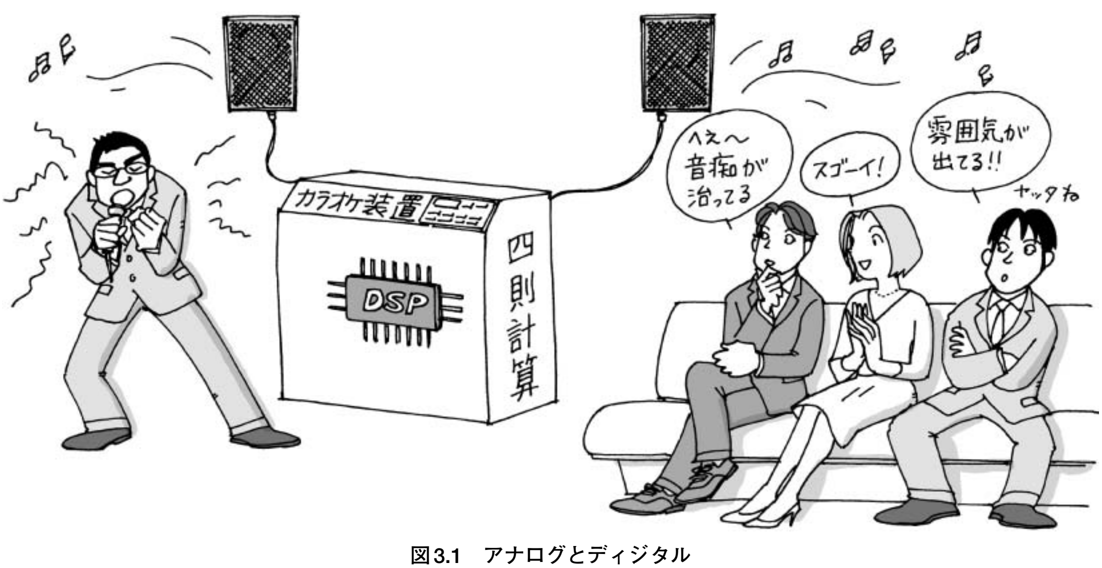

図3.1　アナログとディジタル

くことにしましょう．

3.1　正弦波（cos 波形）を発生させてみよう

一般に，最大振幅 A で周波数 f_0 [Hz] の cos 波形は，

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) \quad ; \phi\,[\mathrm{rad}] \text{ は初期位相} \qquad (3.1)$$

と表されますが，式(3.1)の cos 波形 $x(t)$ はアナログ信号なので，サンプリング間隔 T [秒] でディジタル化する必要があります．数式上は，式(3.1)に $t = kT$ を代入するわけで，

$$x[k] = x(kT) = A\cos(2\pi f_0 kT + \phi) \quad ; T = \frac{1}{f_s} \qquad (3.2)$$

となります．いま，最大振幅 3 で 2 Hz の cos 波形を考え，サンプリング周波数 $f_s = 10$ Hz でディジタル化することを考えてみましょう（**プログラム 3.1**）．

［プログラム 3.1］

`--> sfrq = 10 ; ↵`	……………… サンプリング周波数
`--> tmax = 20 ; ↵`	……………… 2 秒間の総サンプル数（=2*sfrq）
`--> xcos = COS(3,2,0); ↵`	……………… cos 波形の生成
`--> xcos' ↵`	……………… cos 波形の信号値の列表示

［関数コマンド 3.1（cos 波形の生成）**］**

COS（振幅，周波数[Hz]，初期位相）

（注意）cos 波形を生成する関数名「COS」は，必ず大文字で入力してください．小文字の cos は Scilab の組み込み関数の名前として使用されているので，重複を避けています．

プログラム 3.1 を動かしてみると，縦ベクトルの形式として cos 波形の信号値（$k = 0 \sim 20$）が**図 3.2** のように表示されます．

```
-->xcos'
 ans  =

!   3.          !
!   0.9270510   !
! - 2.427051    !
! - 2.427051    !
!   0.9270510   !
!   3.          !
!   0.9270510   !
! - 2.427051    !
! - 2.427051    !
!   0.9270510   !
!   3.          !
!   0.9270510   !
! - 2.427051    !
! - 2.427051    !
!   0.9270510   !
!   3.          !
!   0.9270510   !
! - 2.427051    !
! - 2.427051    !
!   0.9270510   !
!   3.          !
```

図 3.2　プログラム 3.1 の実行結果

図3.2より，サンプリング周波数が10 Hzなので，信号値は0.1秒間隔でディジタル化され，5個分(0.5秒に相当)のディジタル信号が4回繰り返されていることが読み取れます．つまり，2秒間に4周期分が含まれるわけですから，周波数(1秒間あたりの周期の数)は4周期/2秒＝2 Hzとなります．なお，関数コマンドCOSの引数パラメータのうち，初期位相については3.2項で説明します．

3.2　信号波形を見てみよう(オシロスコープ)

前節ではcos波形のディジタル信号を数値として表示しましたが，ここではオシロスコープのように波形グラフを目で見ることに挑戦してみましょう．試しに，**プログラム3.2**のように入力してみてください．ただし，サンプリング周波数は20 Hz，時間は4秒間とします．**図3.3**のように，ウィンドウ番号2に最大振幅2で1 Hzのsin波形がグラフで表示されます．

［プログラム3.2］

`-->  sfrq = 20 ;` ↵	…………… サンプリング周波数
`-->  tmax = 80 ;` ↵	…………… 4秒間の総サンプル数(`=4*sfrq`)
`-->  xsin = SIN(2,1,0);` ↵	…………… sin波形の生成
`-->  osc(xsin,2);` ↵	…………… 1現象オシロスコープで表示

［関数コマンド3.2(sin波形の生成)**］**

`SIN`(振幅，周波数[Hz]，初期位相)

(注意) sin波形を生成する関数名「`SIN`」は，必ず大文字で入力してください．

次に，最大振幅8，サンプリング周波数100 Hz，表示するサンプル数50個，周波数5 Hzのcos波形を例に，関数コマンドCOSの引数パラメータのうち「初期位相ϕ」の影響を調べてみましょう．このとき，式(3.2)より，$A=8$，$f_0=5$ Hz，$T=1/100$秒として，$\phi=-\pi/2\,(=-90^\circ)$，0，$+\pi/2\,(=+90^\circ)$

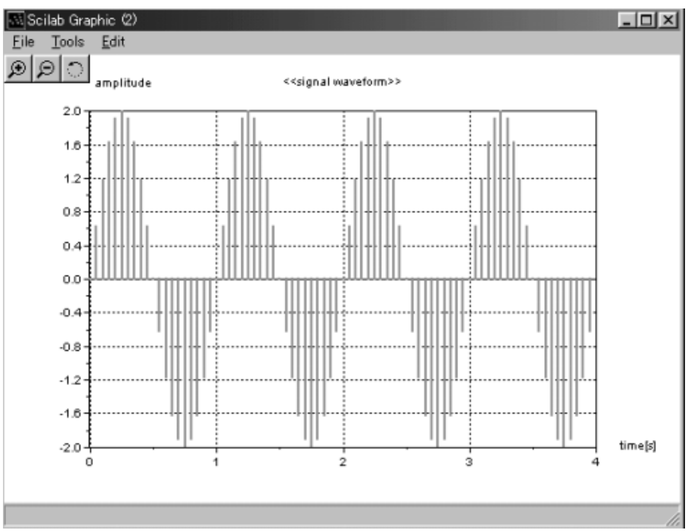

図3.3　プログラム3.2の実行結果

に対する波形はそれぞれ，

$$\begin{cases} x[k]=8\cos\left(\dfrac{\pi}{10}k-\dfrac{\pi}{2}\right) & \cdots\cdots(3.3) \\ x[k]=8\cos\left(\dfrac{\pi}{10}k\right) & \cdots\cdots(3.4) \\ x[k]=8\cos\left(\dfrac{\pi}{10}k+\dfrac{\pi}{2}\right) & \cdots\cdots(3.5) \end{cases}$$

と表されます．

プログラム3.3を動かしてみると，位相が異なる三つの波形グラフが同時に画面に表示されます（**図3.4**）．

［**プログラム3.3**］

`-->  sfrq = 100 ;` ↵	……… サンプリング周波数
`-->  tmax = 50 ;` ↵	……… 表示サンプル数
`-->  x1 = COS(8,5,-%pi/2);` ↵	……… $\phi=-\pi/2$の波形生成
`-->  x2 = COS(8,5,0);` ↵	……… $\phi=0$の波形生成
`-->  x3 = COS(8,5,%pi/2);` ↵	……… $\phi=\pi/2$の波形生成
`-->  xbasc();` ↵	……… ウィンドウ内のグラフ消去
`-->  oscsub (x1,3,1,1,’x1’) ;` ↵	……… $\phi=-\pi/2$の波形表示
`-->  oscsub (x2,3,1,2,’x2’) ;` ↵	……… $\phi=0$の波形表示
`-->  oscsub (x3,3,1,3,’x3’) ;` ↵	……… $\phi=\pi/2$の波形表示

［**関数コマンド3.3**（オシロスコープの画面分割による表示）］

oscsub(信号変数，縦の分割数，横の分割数，表示位置，'タイトル文字')

使用例　たとえば，縦の分割数＝3，横の分割数＝2とするとき，オシロスコープ画面は**図3.5**のように3行2列の6画面に分けられ，表示位置は□で囲んだ数字で指定します．つまり，

```
-->  oscsub(xin,3,2,6);
```

と入力すると，**図3.5**の網かけした画面が選択されるわけです．

● 位相とは

図3.4をじっくり観察すると，初期位相ϕは波形を左右にずらす（平行移動する）働きに関係することがわかります．つまり，位相ϕが負（マイナス）のときは右に平行移動，正（プラス）のときは左に平行移動となります．このとき，右に平行移動された波形は**位相が遅れている**（**位相遅れ**），また左に平行移動された波形は**位相が進んでいる**（**位相進み**）といいます．

また，位相を角周波数で割った値，すなわち，

$$\frac{\text{位相}\,[\mathrm{rad}]}{\text{角周波数}\,[\mathrm{rad/秒}]} \quad\cdots\cdots(3.6)$$

の単位は時間［秒］であり，波形のずれ時間を意味することも理解されます．式(3.4)の位相$\phi=0$［rad］のcos波形を基準にすると，式(3.3)と式(3.5)がそれぞれ，

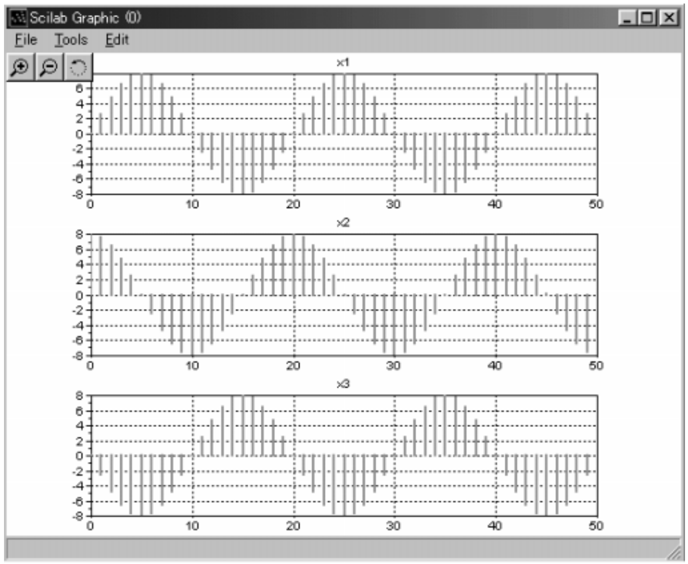

図3.4　プログラム3.3の実行結果

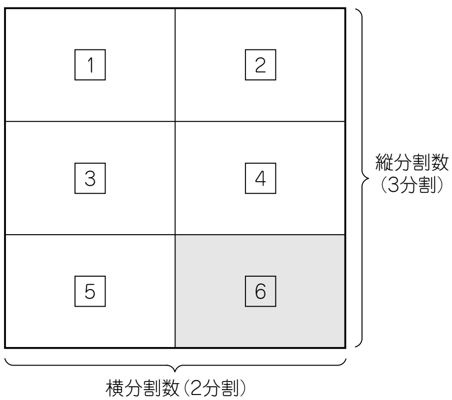

図3.5　oscsub命令によるオシロスコープ画面の分割例

$$
\begin{cases}
x[k] = 8\cos\left\{\dfrac{\pi}{10}(k-5)\right\} & \cdots\cdots (3.7)\\[2ex]
x[k] = 8\cos\left\{\dfrac{\pi}{10}(k+5)\right\} & \cdots\cdots (3.8)
\end{cases}
$$

と表されることから，位相$\phi = -\pi/2$の波形は5サンプル右にずれて遅れており，位相$\phi = +\pi/2$の波形は5サンプル左にずれて進んでいることになります．

ところで，**図3.4**より，式(3.7)のcos波形はsin波形であることも読み取れます．このことは，三角関数の公式として知られる関係，すなわち，

$$
\cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin\theta \qquad \text{（複号同順）} \qquad \cdots\cdots (3.9)
$$

からも明らかで，式(3.7)は，

$$x[k]=8\cos\left\{\frac{\pi}{10}(k-5)\right\}=8\cos\left(\frac{\pi}{10}k-\frac{\pi}{2}\right)=8\sin\left(\frac{\pi}{10}k\right) \qquad \cdots(3.10)$$

と変形できます．同様に，式(3.8)は式(3.9)より，

$$x[k]=8\cos\left\{\frac{\pi}{10}(k+5)\right\}=8\cos\left(\frac{\pi}{10}k+\frac{\pi}{2}\right)=-8\sin\left(\frac{\pi}{10}k\right) \qquad \cdots(3.11)$$

であり，sin波形の符号を反転したものに一致することも導かれます．

3.3　信号スペクトルを見てみよう（スペクトラム・アナライザ）

それでは，信号波形の周波数スペクトルをグラフで表示してみましょう．ちょうど，スペアナ(スペクトラム・アナライザの略称)と呼ばれるスペクトル解析器を仮想的に実現するものです(**プログラム3.4**)．

［プログラム3.4］

```
-->  sfrq = 100 ; ↵        …………… サンプリング周波数
-->  tmax= 100 ; ↵         …………… 表示サンプル数
-->  xs = COS(8,5,%pi/2); ↵ …………… A=8, f0=5 Hz, φ=π/2のcos波形生成
-->  specana(xs,0) ; ↵     …………… 信号スペクトル表示
```

［関数コマンド3.4(信号のスペクトル解析・画面表示)**］**

specana(信号変数，ウィンドウ番号)

(注意)　ウィンドウ番号〔グラフ画面の左上の表示 Scilab Graphic (0) における(　)の中の数値に該当〕を示します．

プログラム3.4の実行結果は**図3.6**であり，式(3.2)より，

$$x[k]=8\cos\left(2\pi\times5\times k\times\frac{1}{100}+\frac{\pi}{2}\right)=8\cos\left(\frac{\pi}{10}k+\frac{\pi}{2}\right) \qquad \cdots(3.12)$$

で表されるcos波形のディジタル信号をスペクトル解析しています．ここで，**図3.6**の上段は「時間波形」，中段は「振幅スペクトル」，下段は「位相スペクトル」を表します．

それでは，**図3.6**を見て気づくことを挙げてみます．

(1) 周波数±5 Hzの成分を有すること

(2) ±5 Hzの振幅値がいずれも4なので，4＋4＝8が最大振幅値に等しいこと

(3) 位相は＋90°(＝$\pi/2$[rad])でプラス符号なので，基準となるcos波形$x[k]=8\cos(\pi k/10)$を左に5サンプルだけ平行移動したものであること(位相が進んでいる)

ところで，**図3.6**ではマイナス記号の付いた負の周波数−5 Hzの成分があり，何か不自然な感じがします．実は，$A\cos\theta$で表される三角関数は，複素指数関数を用いて，

$$A\cos\theta=A\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}=\frac{A}{2}e^{j\theta}+\frac{A}{2}e^{-j\theta} \qquad \cdots(3.13)$$

ただし，$j=\sqrt{-1}$ (虚数単位)

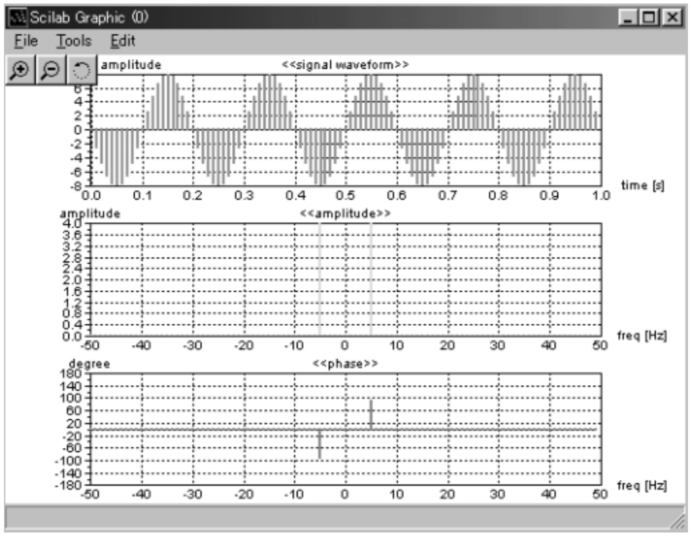

図3.6　**プログラム3.4の実行結果**

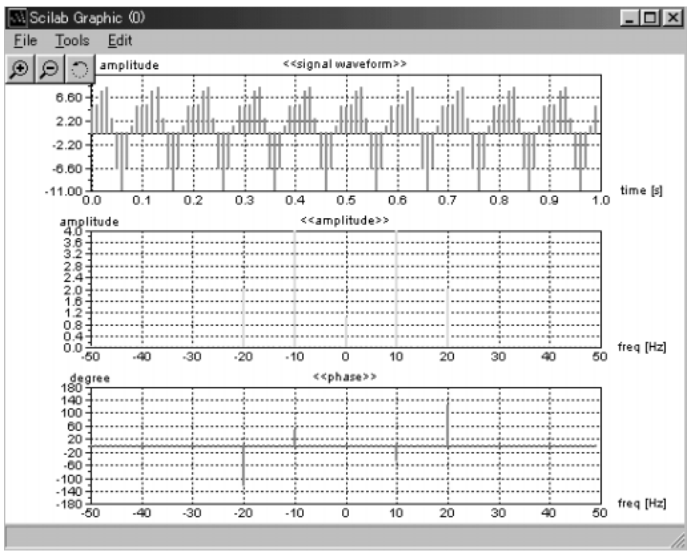

図3.7　**プログラム3.5の実行結果**

のように表されることが知られています（オイラーの公式による）．そこで，$\theta=2\pi ft$とおけば，式(3.13)は，

$$A\cos(2\pi ft)=\frac{A}{2}e^{j2\pi ft}+\frac{A}{2}e^{-j2\pi ft}=\frac{A}{2}e^{j2\pi ft}+\frac{A}{2}e^{j2\pi(-f)t} \qquad \cdots\cdots (3.14)$$

と表されます．つまり，正の周波数f[Hz]と負の周波数$-f$[Hz]の二つの複素正弦波($e^{j2\pi ft}$，$e^{j2\pi(-f)t}$)からcos波形が得られていることになり，しかもcos波形の最大振幅Aの1/2であることがわかります（詳細は，参考文献[2]，[3]，[4]参照）．

このように，**図3.6**の周波数±5 Hzの成分から，最大振幅値の8（＝4＋4）が得られることになるの

です．

次に，三つの周波数(0，10，20 Hz)から合成される信号波形$x(t)$として，

$$x(t)=3+8\cos\left(20\pi t-\frac{\pi}{4}\right)+5\cos\left(40\pi t+\frac{2\pi}{3}\right) \quad \cdots\cdots (3.15)$$

のスペクトルを求めてみましょう(**プログラム3.5**)．ただし，これ以降はとくにことわらない限り，サンプリング周波数`sfrq`は100 Hz，グラフ表示する総サンプル数`tmax`は100とします．

［プログラム3.5］

```
-->  xs = COS(3,0,0)+COS(8,10,-%pi/4)+COS(5,20,2*%pi/3); ↵
                                        …………… 式(3.15)のディジタル信号波形
-->  specana(xs,0) ; ↵                  …………… 信号スペクトル表示
```

図3.7(**プログラム3.5**の実行結果)の信号スペクトルから，以下のことがわかります．

(1) 0 Hz(直流)，±10 Hz，±20 Hzの周波数成分を有すること

(2) 直流の振幅は3で，10 Hzと20 Hzの最大振幅値(−10 Hz，−20 Hzを対として計算)は，それぞれ8，5であること

(3) 10 Hzの位相は−45°(＝$-\pi/4$[rad])でマイナス符号なので，基準となるcos波形$8\cos(20\pi t)$を右に1/80秒だけ平行移動したものであること(位相が遅れている)

(4) 20 Hzの位相は＋120°(＝$2\pi/3$[rad])でプラス符号なので，基準となるcos波形$5\cos(40\pi t)$を左に1/60秒だけ平行移動したものであること(位相が進んでいる)

以上の(1)〜(4)の内容は，式(3.15)の物理的な特徴を言い表していることになります．ここで，(3)の1/80秒および(4)の1/60秒は，位相の絶対値を角周波数で割った値であり，式(3.6)に基づいて，

$$\frac{\frac{\pi}{4}}{20\pi}=\frac{1}{80},\quad \frac{\frac{2\pi}{3}}{40\pi}=\frac{1}{60}$$

と計算できます．なお，位相の細かい数値を読み取りたいときは，「グラフ表示の拡大機能の操作手順」を参考にしてください．

このように，`specana`命令を利用すれば，信号波形の周波数スペクトルの振幅と位相を同時にグラフ表示できるので，いろいろな周波数(0〜サンプリング周波数の1/2)で，最大振幅や位相を変えてスペクトルとの関係を体験しておきましょう．

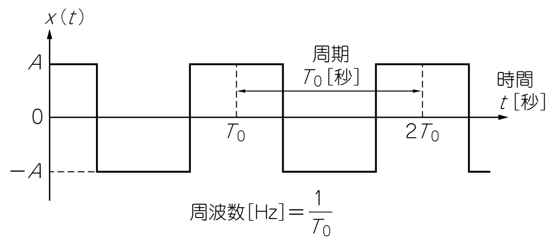

図3.8　方形波

［例題3.1］

図3.8に示すような方形波の周波数を変えて，その周波数スペクトルを調べてみましょう．

［解答3.1］

```
//[Example 3.1]**************************************************************
global sfrq;
global tmax;
disp('sampling frequency='+string(sfrq)+'[Hz]');
     while(1)
          printf('\n');
          frq = input('input frequency [Hz]??? ');
          if frq == [] then break end;
                xs = cos(1,frq,0);
                xs = sign(xs);
          specana(xs,0);
     end
//***************************************************************************
```

［関数コマンド3.5（符号関数）］

sign（信号変数）

（処理内容）　信号値の符号を取り出します．

使用例　x=[-3.5, 2, -0.8, -7]; sign(x) ; ↵

4つの信号（−3.5，2，−0.8，−7）の符号として，

(-1, 1 , -1, -1)

が得られます．

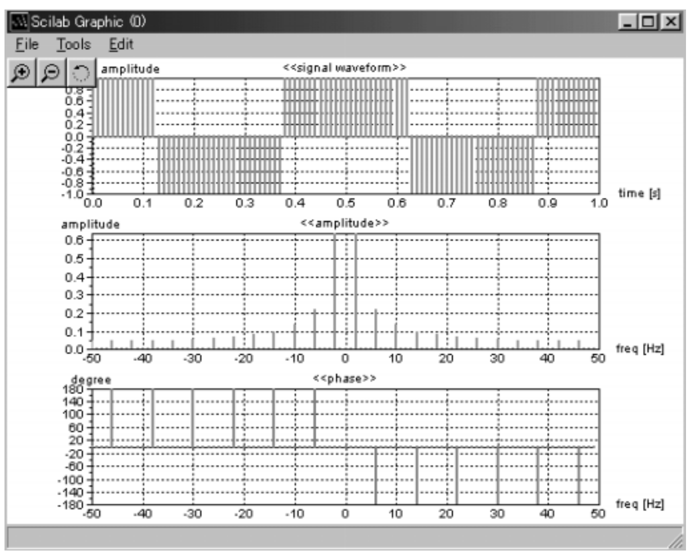

図3.9　解答3.1のプログラムの実行例
（frq＝2 Hz）