



多次元線形システム設計

本章では、多次元線形フィルタ、特にFIRフィルタの設計法をいくつか紹介する。また、1次元マルチレート信号処理の議論を多次元に拡張し、さまざまなサンプリング格子を扱う多次元マルチレート信号処理の構成要素について解説しよう。多次元マルチレート信号処理においては、多次元フィルタに加えて、多次元ダウン・サンブラと多次元アップ・サンブラが基本的な構成要素となる。

9.1 多次元フィルタ設計

以下では、多次元線形フィルタの具体的な設計法について、プログラム例を交えながら紹介しよう。まず、準備としてFIRフィルタとIIRフィルタについて復習しておこう。

● FIRフィルタとIIRフィルタ

FIR(有限インパルス応答)フィルタは、インパルス応答のサポート領域が有限の範囲に収まるフィルタであり、IIR(無限インパルス応答)フィルタは、インパルス応答のサポート領域が無限に広がるフィルタである。IIRフィルタに対するFIRフィルタの特徴を以下にまとめる^{注9-1}。

- 常に安定である。IIRフィルタは係数によっては不安定となる。
- 量子化誤差の影響が少ない。IIRフィルタはフィードバックによる累積誤差が問題となる。
- 所望の振幅特性を得るためのフィルタ次数がIIRフィルタより高くなり、フィルタリングのための計算量が多い。

(1) システムの安定性

線形シフト不変システムの安定性の条件の一つに「BIBO安定」がある。BIBO安定のシステムでは、有界な入力 $|x[n]| < \infty$ に対し、有界な出力 $|y[n]| < \infty$ を得る。このBIBO安定の必要十分条件は、システムのインパルス応答 $h[n]$ によって

注9-1：川又政征，樋口龍雄 著，「多次元デジタル信号処理」(1995年，朝倉書店 刊)を参照。

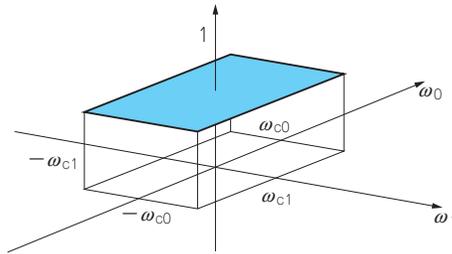


図9.1 方形理想低域通過フィルタの振幅応答

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^D} |h[\mathbf{n}]| < \infty \dots\dots\dots (9.1)$$

のように表現できる。有限な値の係数をもつFIRシステムは、常に安定している。

(2) Shanksの安定定理

分母のみが多項式となっている特殊な2次元システム

$$H(\mathbf{z}) = \frac{1}{D(\mathbf{z})} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} h[\mathbf{n}] \mathbf{z}^{-\mathbf{n}} \dots\dots\dots (9.2)$$

が安定であるための必要十分条件は、 $|z_0| \geq 1$ かつ $|z_1| \geq 1$ の任意の $\mathbf{z} = (z_0, z_1)^T$ に対して、

$$D(\mathbf{z}) \neq 0 \dots\dots\dots (9.3)$$

となることである。分母分離型($D(\mathbf{z})$ が可分離)の場合、2次元の安定判別は1次元の問題に帰着する。一方で、分子多項式 $N(\mathbf{z})$ のある一般的なIIRフィルタ

$$H(\mathbf{z}) = \frac{N(\mathbf{z})}{D(\mathbf{z})} \dots\dots\dots (9.4)$$

の場合、分子多項式 $N(\mathbf{z})$ が安定性に影響するため、その安定判別は容易ではない。

● フィルタ仕様

具体的なフィルタ設計法について紹介する前に、設計手順および理想フィルタについてまとめておこう。

(1) 設計手順

フィルタ設計においては、まず、設計仕様を与える。設計仕様には、所望の特性や実現規模などがある。次に、所望の特性を近似することで実現可能な伝達関数を求める。最後に、フィルタ構造を決定し、ソフトウェアあるいはハードウェアとして実現する。この手続きのうち、近似の作業が最も重要である。

次に、設計仕様を与える際の所望特性として、しばしば利用される方形理想低域通過フィルタと円対称理想低域通過フィルタを紹介しよう。

(2) 方形理想低域通過フィルタ

図9.1に2次元方形理想低域通過フィルタの振幅応答を示す。ゼロ位相を仮定すると、多次元の方理想低域通過フィルタの周波数応答は、任意の正の実数 ω_{cd} に対して、



$$H_I(e^{j\omega^T}) = \begin{cases} 1 & |\omega_d| \leq \omega_{cd} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \dots\dots\dots (9.5)$$

と定義される。また、インパルス応答は、周波数応答の逆離散空間フーリエ変換(IDSFT)として

$$h_I[\mathbf{n}] = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\omega \in [-\omega_{cd}, \omega_{cd}]^D} e^{j\omega^T \mathbf{n}} d\omega = \frac{\sin \omega_{c0} n_0}{\pi n_0} \cdot \frac{\sin \omega_{c1} n_1}{\pi n_1} \dots \frac{\sin \omega_{cD-1} n_{D-1}}{\pi n_{D-1}} = \prod_{d=0}^{D-1} \frac{\omega_{cd}}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_{cd}}{\pi} n_d\right) \dots\dots\dots (9.6)$$

のように与えられる。ここで、 $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{D-1})^T$ である。

例題9.1 方形理想低域通過フィルタ

$\omega_{c0} = \omega_{c1} = \pi/3$ として、2次元の方形理想低域通過フィルタのインパルス応答を描いてみよう。

解

以下に、MATLAB上でのコマンド例を示そう。

```
% カットオフ周波数の設定
fc0 = 1/3; % 垂直(×π rad)
fc1 = 1/3; % 水平(×π rad)
% 表示範囲の設定
region = 20;
% インパルス応答の計算
[iHorizontal,iVertical] = ...
    meshgrid(-region:region,-region:region);
r0 = (fc0)*sinc((fc0)*iVertical);
r1 = (fc1)*sinc((fc1)*iHorizontal);
idealFilter = r0 .* r1;
% インパルス応答の表示
mesh(iHorizontal,iVertical,idealFilter);
xlabel('n_1');
ylabel('n_0');
```

図9.2にMATLABによる計算結果を示す。ただし、インパルス応答が無限に広がるため、原点を中心とした周辺のみをの応答を示している。

実習9.1 方形理想低域通過フィルタ

M-file : practice09_1.m

カットオフ周波数 ω_{c0} , ω_{c1} を変えたときのインパルス応答を確認してみよう。



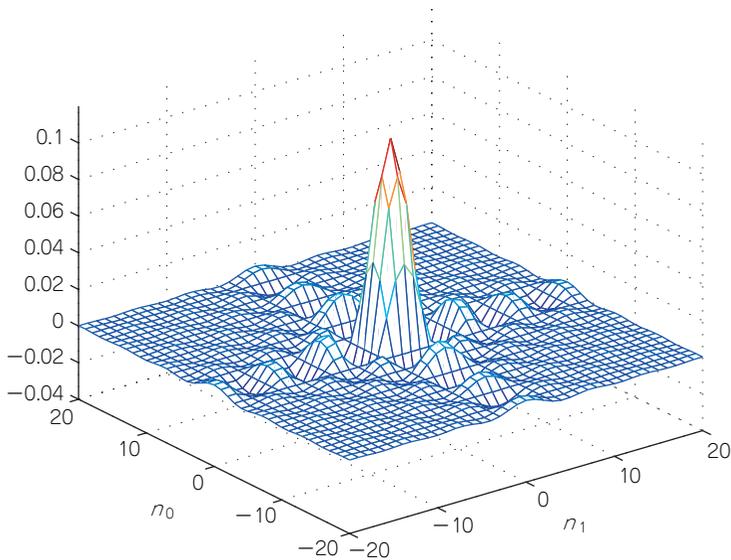


図9.2 方形理想低域通過フィルタのインパルス応答の例

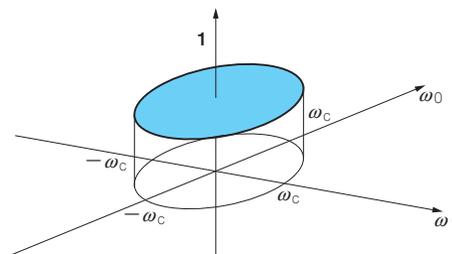


図9.3 円対称理想低域通過フィルタの振幅応答

(3) 円対称理想低域通過フィルタ

図9.3に円対称理想低域通過フィルタの振幅応答を示す．ゼロ位相を仮定すると，円対称理想低域通過フィルタの周波数応答は

$$H_1(e^{j\omega'}) = \begin{cases} 1 & \omega_0^2 + \omega_1^2 \leq \omega_c^2 \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \dots\dots\dots (9.7)$$

のように定義される．ここでは，議論を2次元の場合に限定する．インパルス応答は，周波数応答の逆離散空間フーリエ変換(IDSFT)として

$$\begin{aligned} h_1[\mathbf{n}] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\omega_0^2 + \omega_1^2 \leq \omega_c^2} e^{j\omega' \mathbf{n}} d\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\omega_c} \int_0^{2\pi} \omega e^{j\omega \sqrt{n_0^2 + n_1^2} \cos(\theta - \phi)} d\phi d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_c} \omega J_0(\omega \sqrt{n_0^2 + n_1^2}) d\omega \\ &= \frac{\omega_c}{2\pi} \cdot \frac{J_1(\omega_c \sqrt{n_0^2 + n_1^2})}{\sqrt{n_0^2 + n_1^2}} \quad \mathbf{n} \neq \mathbf{0} \dots\dots\dots (9.8) \end{aligned}$$

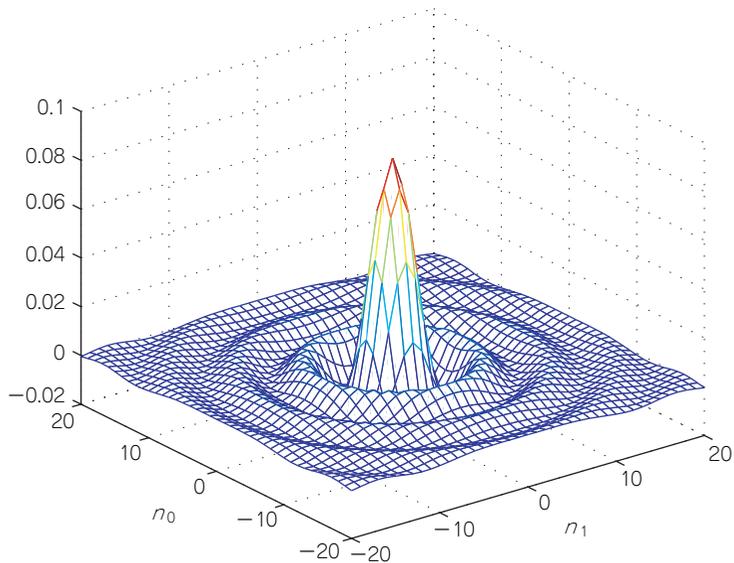


図9.4 円対称理想低域通過フィルタのインパルス応答の例

$$h_1[\mathbf{0}] = \frac{\omega_c}{2\pi} \cdot \frac{\omega_c}{2} \dots\dots\dots (9.9)$$

のように与えられる。ここで、 $J_n(x)$ は、 n 次の第1種Bessel関数である。

例題9.2 円対称理想低域通過フィルタ

$\omega_c = \pi/3$ として、円対称理想低域通過フィルタのインパルス応答を描いてみよう。

解

以下に、MATLAB上でのコマンド例を示そう。

```

% カットオフ周波数の設定
fc = 1/3; % (×π rad)
% 表示範囲の設定
region = 20;
% インパルス応答の計算
[iHorizontal,iVertical] = ...
    meshgrid(-region:region,-region:region);
r = sqrt(iHorizontal.^2+iVertical.^2);
iOrg = find(r==0);
r(iOrg) = 1;
idealFilter = (fc/2)*besselj(1,pi*fc*r)./r;

```

```

idealFilter(iOrg) = pi*fc^2/4;
% インパルス応答の表示
mesh(iHorizontal,iVertical,idealFilter);
xlabel('n_1');
ylabel('n_0');

```

図9.4に結果を示す。ただし、インパルス応答が無限に広がるため、原点を中心とした周辺のみ
の応答を示している。

実習9.2 円対称理想低域通過フィルタ

M-file : practice09_2.m

カットオフ周波数 ω_c を変えたときのインパルス応答を確認してみよう。

● 近似仕様

所望の特性の近似を行うためには**近似仕様**を定めなければならない。近似仕様を与える対象の例
を以下にまとめる。

- インパルス応答： $h[\mathbf{n}]$
- 周波数応答： $H(e^{j\omega^T})$
 - 振幅応答： $|H(e^{j\omega^T})|$
 - 位相応答： $\angle H(e^{j\omega^T})$

もしくは、群遅延特性： $-\frac{\partial \angle H(e^{j\omega^T})}{\partial \omega_d}$

(1) 振幅応答

2次元の場合について、振幅特性の通過域を設定する際の典型的な近似仕様を図9.5に示す。また、
低域通過型フィルタの近似仕様を与える際の領域設定の例を図9.6に示す。図9.6において、 R_p は**通
過域**を意味しており、この領域内では許容誤差 δ_p を用いて次のように振幅応答が設定される。

$$1 - \delta_p \leq |H(e^{j\omega^T})| \leq 1 + \delta_p, \omega \in R_p \quad \dots\dots\dots (9.10)$$

また、 R_s は**阻止域**を意味しており、この領域内では許容誤差 δ_s を用いて次のように振幅応答が設定
される。

$$|H(e^{j\omega^T})| \leq \delta_s, \omega \in R_s \quad \dots\dots\dots (9.11)$$

最後に、 R_t は**遷移域**を意味しており、これは振幅応答の仕様を設定しない領域である。

(2) 位相応答

位相応答に与えられる仕様として、例えば線形位相特性がある。画像処理の応用では、振幅ひず
みに比べて位相ひずみの方が知覚しやすく、線形位相特性は音声信号処理に比べて重要な性質である。

線形位相フィルタでも特にゼロ位相フィルタが画像処理において頻繁に利用される。インパルス
応答 $h[\mathbf{n}]$ が

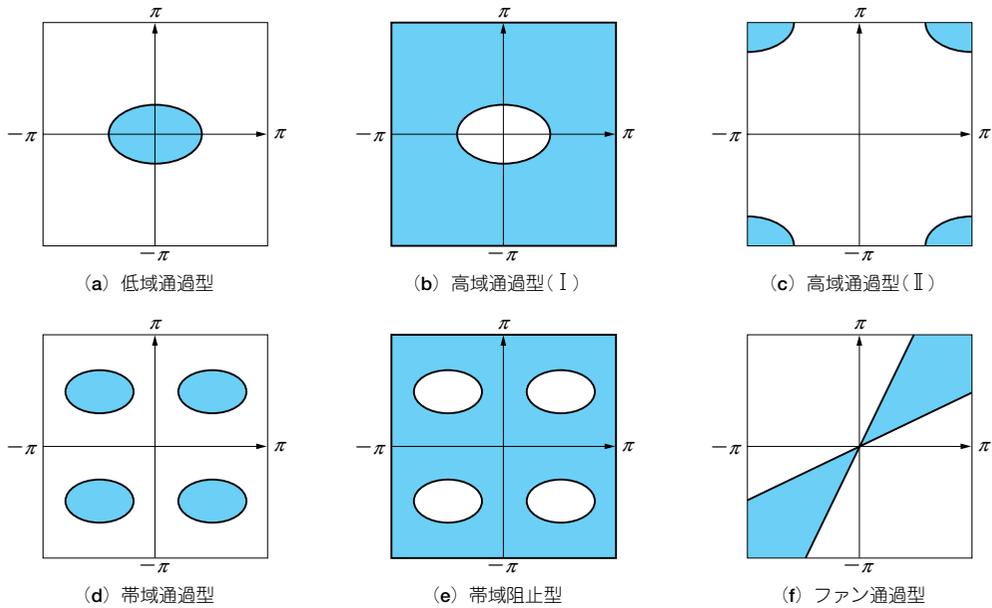


図9.5 典型的な通過域の仕様

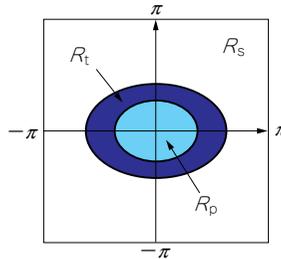


図9.6 典型的な近似仕様

$$h[\mathbf{n}] = h[-\mathbf{n}], \mathbf{n} \in Z^D \dots\dots\dots (9.12)$$

のように原点を中心として対称性を持たばゼロ位相特性となる。この周波数応答は、

$$H(e^{j\omega^T \mathbf{n}}) = \sum_{\mathbf{n} \in Z^D} h[\mathbf{n}] e^{-j\omega^T \mathbf{n}} = h[\mathbf{0}] + \sum_{\mathbf{n} \in Z^D, \mathbf{n} \neq \mathbf{0}, n_0 \geq 0} h[\mathbf{n}] (e^{j\omega^T \mathbf{n}} + e^{-j\omega^T \mathbf{n}}) = h[\mathbf{0}] + \sum_{\mathbf{n} \in Z^D, \mathbf{n} \neq \mathbf{0}, n_0 \geq 0} h[\mathbf{n}] 2 \cos \omega^T \mathbf{n} \dots\dots (9.13)$$

のように実数となる。

9.2 FIRフィルタ設計

以下では、常に安定しているFIRフィルタの設計を中心に解説を進めよう。