

第1章

フーリエ変換 (ウェーブレット変換のための数学入門)

本書のテーマは、モバイル通信や画像データ圧縮などの分野において、八面六臂の大活躍を見せている“ウェーブレット変換”である。フーリエ変換が周波数のみに着目した信号解析法であるのに対し、ウェーブレット変換は時間と周波数を同時に分析することが最大の売りである。

本章では、最初にウェーブレット変換の土台となるスペクトラム解析法“フーリエ変換”について、例え話を盛り込みながら、分かりやすく丁寧に解説する。もちろん、よくご存知の方には知識の再確認、お忘れになった方には復習、といった意味合いで読んでいただきたい。具体的には、“フーリエ変換”の基礎的な概念として“マッチ度(類似度, 相関)”を取り上げ、信号解析を行うときに必要となる最小限の数学、数式がもつ物理的意味を説明する。

さらに、マッチ度を一般化するプロセスを示して、DFT(デジタル・フーリエ変換)が導出されることを解説する。また、マッチ度と正規直交変換の関係を述べ、正規直交基底ベクトルによる信号展開について具体例とともに紹介する。なお、取り上げる内容はウェーブレット変換の基礎となるものなので、行列計算も含めて、しっかりと理解してもらいたい。

1.1 “フーリエ変換”談義

ある日、とある^{しょうじや}瀟洒な住宅街。甘くておいしいケーキにマッチしたコーヒーをブレンドしてくれると評判のオープン・カフェ“茶房 スペクトル”があった(図1.1)。カフェのマスターの名前は、Jean Baptiste Joseph Baron de Fourier(ジャン・バプティストゥ・ジョセフ・バロン・ドゥ・フーリエと読む⁽³⁾)。信号解析の王様『フーリエ変換』を考案した、著名な数理物理学者。1768年3月21日生～1830年5月16日没)、人呼んで“フーリエ”さんである。

1.1.1 フーリエ変換はテイスティングが得意

先ほどから大きな声で、「ケーキにマッチするコーヒー」についてマスターが講釈を垂れているらしい。興味深い話題なので、そうっと盗み聞きしてみよう。

常連客らしい三人のお客さま(かりに、A男、B之助、C子と呼ぶ)を前に、フーリエさんは、



図1.1 “茶房 スペクトル”とフーリエさん

「今日は皆さんのために、特別に上質のコーヒーを3種類ご用意しておきました。飲み比べて、それぞれの特徴を言葉で表してみてくださいませんか」

と質問してみた。テーブルの上には、既にブレンドしてある3種類のコーヒーを入れたポットP, Q, Rが置かれてる。試飲したお客様の反応はどうだろうか。三者三様といったところで、それぞれの感想を要約して表にまとめてみると、表1.1のようだ。

そういった三人のお客さまの喧々譁々けんけんがくがくの会話を、うんうんとうなづきながら聞いていたフーリエさんは、次のようにコメントした。

「ははは。いろいろなご感想、ありがとうございます。そうですね、好みは人それぞれですし、言葉で表現しても、どうも違いがはっきりしないものです。コーヒーの違いを、もっと客観的に言い表す方法はないのでしょうかね」

フーリエさんのコメントを聞いて、B之助は、

「どのコーヒーも、コーヒー豆から作られているわけだし、味だってそんなに違わないし…。どう表現したらいいんだろう。ほとほと弱ったよ」

表1.1 3種類のブレンド・コーヒーの3人の感想

		コーヒー・ポット		
		P	Q	R
お客様	A男	すっきり	すっぱい	フルーティ
	B之助	しぶい	なめらか	まろやか
	C子	にがい	さわやか	どっしり

表1.2 3種類のコーヒーの産地別含有率

コーヒー・ポット	産地X	産地Y	産地Z
P	10%	70%	20%
Q	50%	20%	30%
R	40%	10%	50%

と、ぶつぶつ独り言。ところが、主婦らしい感じのC子はすかさず、すっとんきょうな高音で、「豆と言ったって、まったく同じというわけじゃないでしょう。産地によって、味が少しずつ違うんじゃない。いろんな産地の豆がブレンドされているなら、産地ごとの豆の分量を調べてみたらどうかしら。ねえ」と、身を乗り出す。これを受けてA男は、

「ふむふむ、産地によって豆を分けるなんて、的を射たアイデアかもしれないね。けど、『このコーヒーにはどこの産地の豆が、どれくらいの量含まれているのか』ってことを、どうやって分析するんだい。やっぱりコーヒーを味わうのは、自分の味覚を鍛えてからだね…」

と、得意顔で話し出す。それを遮って、フリーエさんが言った。

「いえいえ、A男さん。それが分析できるのです。そのためのテクニックこそ、何を隠そう、私が長年の経験から編み出したフリーエ変換なのです〔図1.2(a)〕。試しにこの『フリーエ変換機』を使ってみましょうか」

そう言ってフリーエさんがどこからともなく取り出したのは、『フリーエ変換機』と呼ばれる不思議な機械。3種類のコーヒーを1種類ずつ注いで、『フリーエ変換機』のコックをひねると、ウィンウィーンと音を立てて、表1.2のように結果がはじき出された。

この結果は、コーヒーに混合された産地ごとの豆の分量を「数値」としてきちっと表したものだ。理系のB之助は、まるで何か大発見を成し遂げたかのように、すかさず、「なるほど。産地別に分離してみる。なるほどね。僕らが実際に味わうコーヒーは、いろんな豆が混合されたものを感覚的に受け止めている。原料の豆の含有量を数値によって表せば、これほど客観的にコーヒーの特徴を見極める手段はないもんね。A男君みたいに味覚で細かい味まで判断できなくても、だれでも分かる」と言葉を発して、盛んにうなずいていた。

こうしたやりとりをにこやかな笑顔で見ていたフリーエさんは、「そうなんです。『フリーエ変換機』を用いれば瞬時に、コーヒーに含まれる豆を、産地ごとに成分分析することができるのです。なかなか大したものでしょう。逆に、豆の産地ごとの含有量をもとに混ぜ合わせて、おいしいコーヒーを合成する方法を、当店では逆フリーエ変換と呼んでおります。まあ、身近な例で言えば、ドリップ・コーヒー・マシンのようなものと言えるでしょうか。そんなテクニックも、私の考案したものなのですよ」と自慢げに語るのであった(図1.2)。

1.1.2 コーヒーの混ざり物を取り除くには

いま、ラベルに“CQ出版”と印刷してある極上のコーヒーが、三つの産地X、Y、Zのコーヒー豆からブレンドされているものとして。ある日、B之助が豆をブレンドして、“CQ出版”コーヒーを作ったあとで、は

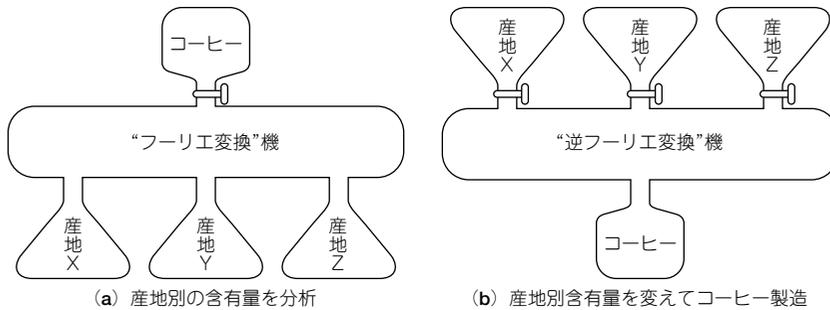


図1.2 フーリエ変換と逆フーリエ変換

たと気が付いたことがあった。誤って「産地N」の豆を混ぜてしまったのだ。

しかしながら、もうあとの祭りで、不純物である「産地N」の豆成分を取り除くことは不可能だ…と、B之助は早々とあきらめてしまっていた。そこに現れたA男は、
「コーヒーの話だったら、一度「茶房 スペクトル」のマスタにお願いしてみたらどうだい」
とアドバイスしてくれたのであった。

早速、B之助が「茶房 スペクトル」を訪ねて、事の一部始終を説明すると、マスタのフーリエさんは、笑みを満面にたたえて言った。

「そんなことでしたら、お安い御用です。混ざり物を取り除くなんて、『フーリエ変換機』と『逆フーリエ変換機』を使えば、朝めし前ですよ」

B之助は、混ざり物コーヒーから「産地N」の成分をどのようにして除去するのかについて、フーリエさんから懇切丁寧に説明してもらうことができた(図1.3)。

それでは、図1.3に基づき、混ざり物を除去するためのフーリエさんの考案した手順を、簡単にまとめておくことにする。

手順1

コーヒーに含まれる豆の産地を『フーリエ変換機』で分析し、産地別の混ぜ合わせの割合を知る。

手順2

『逆フーリエ変換機』を用いて、不純物に相当する「産地N」の豆の混ぜ合わせの割合をゼロ(0)にし、混ざり物を除去した豆をブレンド合成する。

産地別に分類するための方法が『フーリエ変換機』で、不要な産地の豆を取り除いて自分好みの味覚にマッチするブレンド合成するための方法が『逆フーリエ変換機』である。これらを順に用いることにより、不純物を容易に取り除くことができるのである。

実は、フーリエ変換が現実世界で威力を発揮するのは、多種多様な信号を解析するという場面だ。そこで、

- | | | | |
|---|--------------|---|-----------|
| { | コーヒー豆の産地 | ⇒ | 周波数 |
| | 不純物(混ざり物) | ⇒ | ノイズ(雑音)成分 |
| | 不純物を含まないコーヒー | ⇒ | 信号成分 |

と置き換えて考えてみると、ノイズを含んだ信号から不純物のノイズを取り除く処理(フィルタリング；

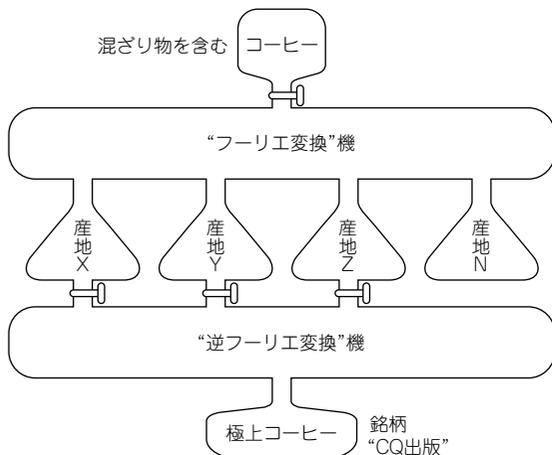


図1.3 混ざり物を除去するコーヒー製造手順

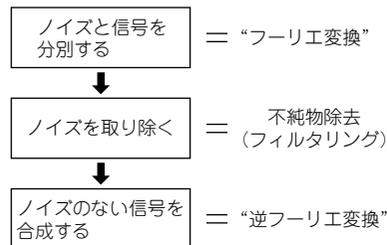


図1.4 ノイズを除去する信号処理手順

filtering)の道筋も見えてくる。ノイズを除去するための信号処理システムの概念を図1.4に示すが、これはよく見ると、図1.3のコーヒーを作るシステムと同じものだ。

手順1

ノイズを含んだ信号を『フーリエ変換』して周波数成分ごとに分割し、信号成分とノイズ成分に分別する。

手順2

ノイズ成分をゼロ(0)にして、不純物のノイズ成分を取り除き、信号成分のみを『逆フーリエ変換』することにより、ノイズのない信号を得る。

このように一般的な信号処理手順を説明したあと、フーリエさんはB之助から手渡されたコーヒーを『フーリエ変換機』に通して、混ざり物を取り出す。次に、『逆フーリエ変換機』により再ブレンド合成して、正真正銘の極上のコーヒー“CQ出版”を作り直すことに見事成功したのだった。

フーリエさんからB之助に手渡された極上のコーヒー“CQ出版”を味わうことができ、B之助はフーリエさんに何度も頭を下げて感謝の意を表したという。

“茶房 スペクトル”を切り盛りするマスタのフーリエさん——実際には数物理学者のフーリエ——は、19世紀に『フーリエ変換』というテクニックを、信号処理の世界に初めてもたらした、伝道師とも言うべき偉い人だ。ここまでのお話はおとぎ話だったが、フーリエさんが偉い理由は、フーリエ変換が本当にいろいろなところで役立っているからなのだ。

先ほど信号解析の話がちらっと出たが、例えばコーヒーを『音』、産地や味覚を『周波数成分』と読み替えてみよう。すると、ステレオやカー・オーディオなどの音響機器に付属する“グラフィックス・イコライザ”(液晶に表示された音楽とともに棒が上がり下がりする例のあれ。スぺアナともいう)も、同じような考え方で実現していることが分かる。イコライザというのは、音の周波数成分の“混ざり具合”を調整しているものだからだ。

どんな音質でも創れてしまうこのテクニックのほかにも、コンピュータ・グラフィックス、地震波解析、