

## 第9章

# ウェーブレット変換の総まとめ

終章では、「ウェーブレット変換の総まとめ」と題し、変換のもつ物理的な意味と数式表現との関係を中心に総括する。まず、基本原理と時間周波数解析の考え方を取り上げ、最低限必要となる数学的知識、専門用語を思い起こしていただくことにしよう。

次に、ツースケール数列に基づくスケーリング関数とマザー・ウェーブレットの一般化を行ったあと、ウェーブレット変換の多重解像度解析における基本原理の信号分析/合成アルゴリズムを取り上げ、全体的な処理概要について説明する。

続いて、多重解像度解析とウェーブレットおよびスケーリング関数の関係を中心に、分かりやすく説明する。また、フィルタ・バンク構成におけるサブバンド信号分析/合成のアルゴリズムを導き、ウェーブレット変換との関係を調べて、正規直基底ベクトルによる表現との対応付けを行う。

最後に、直交ウェーブレット、フィルタ・バンク構成によるサブバンド信号分析/信号合成システム、ならびにマルチレート処理(ダウン・サンプリング、アップ・サンプリング)について説明し、ウェーブレット変換の解説を締めくくりたい。

## 9.1 ウェーブレット変換とは

ウェーブレット (wavelet) 理論の誕生は1980年代初めで、フランスの石油探査技師Morletが、石油の埋蔵場所を特定するため、人工地震波信号の精密な時間(埋蔵場所の特定)と周波数(埋蔵資源の分別、石油かどうか)の情報を同時解析するために考案した(図9.1)。つまり、ウェーブレットは、“時間的変化の特徴”と“周波数成分の混じり方”を知るために用いられ、時間と周波数にかかわる信号情報を同時に抽出することができる。

ところで、周波数解析の手法としては古典的なフーリエ変換 (Fourier Transform) が真っ先に挙げられる。フーリエ変換は周波数成分を解析するための手法であり、コンピュータ処理するためのDFT (Discrete Fourier Transform) と、その高速計算バージョンであるFFT (Fast Fourier Transform) が有名どころである。

例えば、人の声の性質(声色、声紋)をはじめとして、楽器の音色や画像、自然界のあらゆる信号はすべ

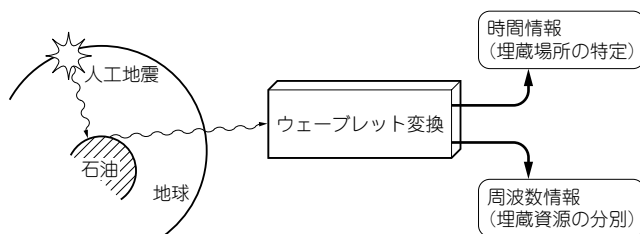


図9.1 ウェーブレット変換による石油探査のイメージ

て、固有の周波数成分の混じり方を有している。こういった周波数成分の混じり方を解析できるのが、フーリエ変換である。

しかし、フーリエ変換では信号のもつ性質をすべて周波数情報に置き換えてしまうため、時間に関連する情報が失われてしまう。言い換えれば、時間とともに刻々と変動する信号であっても、フーリエ変換では周波数成分だけしか得られないので、大ざっぱな信号情報しか見いだせない〔図9.2 (a)〕。

そこで、図9.2 (b)のように時間を一定間隔ずつ切り出しては次々にフーリエ変換する手法として、短時間フーリエ変換 (short-time Fourier Transform) が考案された。ただ、解析する時間幅が一定に固定されていることが最大のネックとなり、時間と周波数を同時に解析するには物足りないものであった。

この物足りなさを埋め合わせるものとして、周波数に応じて解析する時間幅を変化させるというウェーブレットが発案されたのである。つまり、周波数の低い成分に対しては“解析する時間幅を長くする”，高い成分に対しては“逆に、短くする”のである。このように、解析する時間幅を周波数に反比例させることによって、多くの信号解析が合理的に行えるようになり、自然の摂理にかなう「時間と周波数を同時に解析する手法、すなわちウェーブレット変換」が確立されたのである。

### 9.1.1 ウェーブレットの考え方

フーリエ変換では、信号の周波数成分を解析するための物差しとして「さまざまな周波数のsin波、およびcos波」が用意されている。

これに対して、ウェーブレットでは、信号の時間と周波数の関係を同時に解析するため、基準とする物差しとして、たった一つのマザー・ウェーブレット (mother wavelet) と呼ばれる小さな波の欠片かけらが用意されているだけである (図9.3)。なお、マザー・ウェーブレットを基本ウェーブレットともいう。

この小さな波の欠片が八面六臂の活躍をすることになるわけで、基準となる一つのマザー・ウェーブレットをいろいろな縮尺に引き伸ばすことにより、周波数の物差しであるウェーブレットを多数用意して、時間軸方向に平行移動させながら解析したい信号にあてがい、時間と周波数の情報を同時に得るのである。こうした処理によって、2次元的にダイナミックに解析した結果として、時間と周波数の情報が同時に表示されるという具合である (図9.4)。

ここで、ウェーブレットを信号にあてがって解析する、というところの計算イメージは、

『信号の中に、あてがった物差しであるウェーブレットに似た成分がどれくらい含まれているのか測定する』

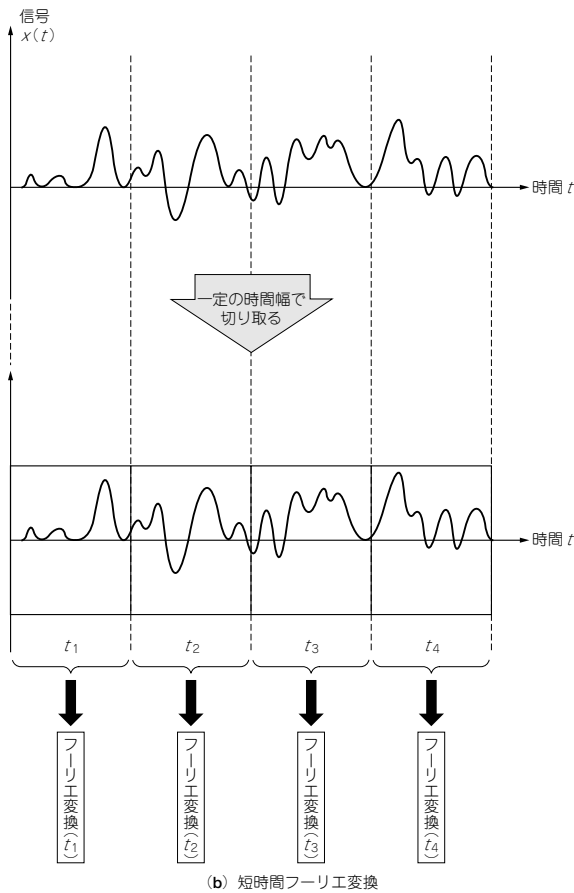
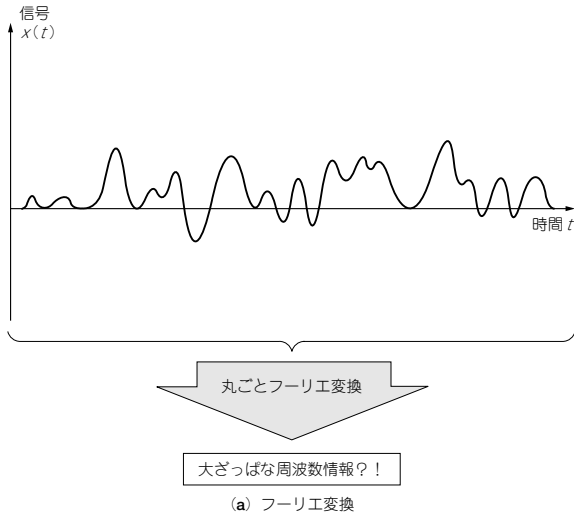


図9.2 フーリエ変換による周波数成分の分析

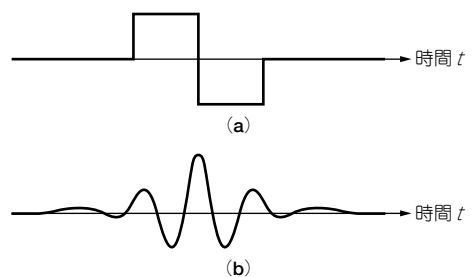


図9.3 マザー・ウェーブレットの例

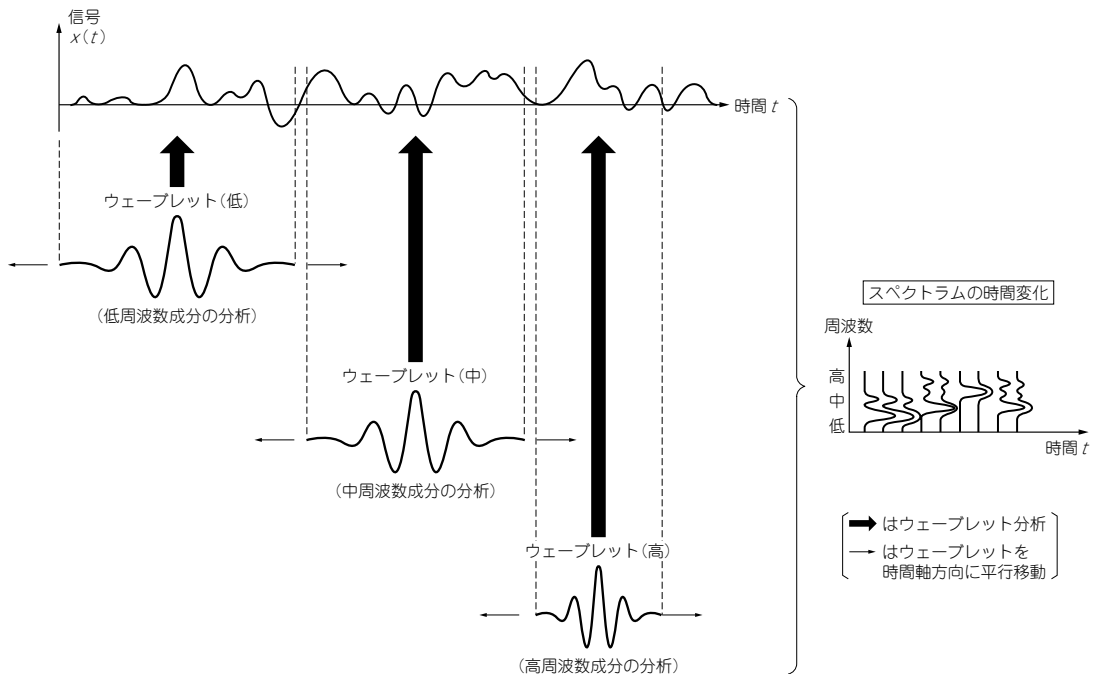


図9.4 ウェーブレット変換の基本原理

ということになる。信号とウェーブレットの相関値を求めることに等価であり、関数の内積によって計算されるのが一般的である。すなわち、信号 $x(t)$ とウェーブレット $\psi_\ell(t)$ の内積は、

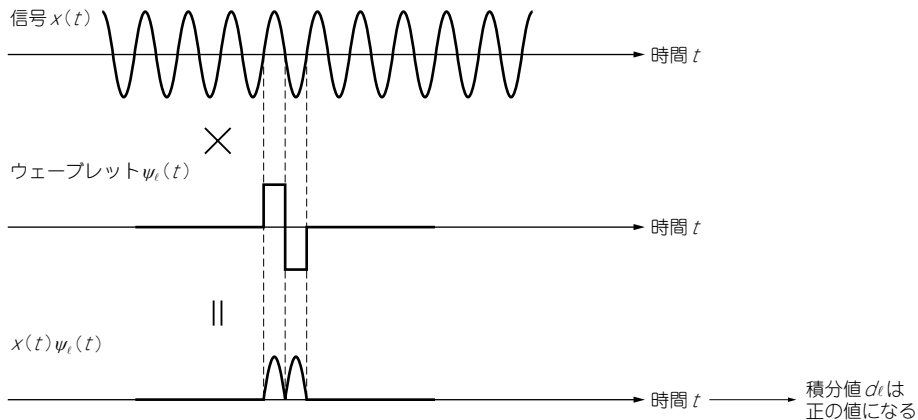
$$d_\ell = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi_\ell(t)} dt \dots\dots\dots (9.1)$$

で定義される。ここで、複素共役の記号は、ウェーブレット $\psi_\ell(t)$ が複素関数のときには無視できないが、実関数のときにはとらずに無視しても構わないので、内積の計算は $x(t)$ と $\psi_\ell(t)$ を掛け合わせて積分することになる。こうして、 $x(t)$ と $\psi_\ell(t)$ の似ている度合いが、積分計算することによって数値化されるという“ウェーブレット $\psi_\ell(t)$ ”のイメージが導かれる。

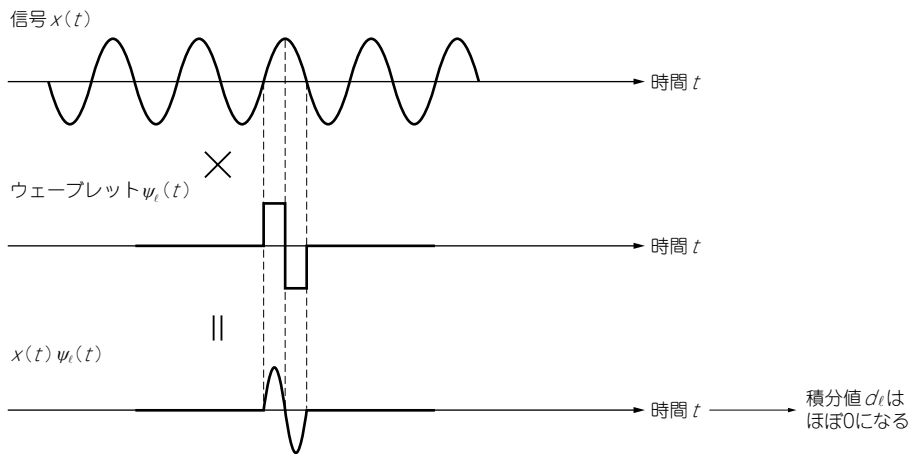
例えば、sin 波形の信号をウェーブレット $\psi_\ell(t)$ で解析することを考えてみよう(図9.5)。図9.5(a)では、信号とウェーブレットの周波数が一致しているので、それらをかけ合わせると正の値になり、積分値は「信号の中にウェーブレット $\psi_\ell(t)$ に似た成分がどれくらい含まれているのか」という情報を与えることになる。一方、図9.5(b)のように信号とウェーブレットの周波数がずれているときは、それらをかけ合わせると正負の値が得られ、積分値はほとんどゼロ(0)になるので、「信号とウェーブレット $\psi_\ell(t)$ は、ほとんど似ていない(無相関)」ということが分かる。

### 9.1.2 ウェーブレット変換の種類

さて、ウェーブレット変換は、2種類に大別される(図9.6)。



(a) 信号  $x(t)$  とウェーブレット  $\psi_t(t)$  の周波数との同期がとれた場合



(b) 信号  $x(t)$  とウェーブレット  $\psi_t(t)$  の周波数がずれた場合

図9.5 信号  $x(t)$  とウェーブレット係数  $d_t$  の関係

### ● 連続ウェーブレット変換

連続ウェーブレット変換では、アナライジング・ウェーブレット  $\Psi(t)$  の縮尺 (変数  $a$ ) を連続的に変化させて、時間軸方向にも連続的に平行移動 (変数  $b$ ) したものの  $\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$  と信号  $x(t)$  の内積として、

$$X_a(f, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \dots\dots\dots (9.2)$$

を計算する。ここで、式 (9.2) 中の  $\overline{\Psi(\cdot)}$  は  $\Psi(\cdot)$  の複素共役を表す。パラメータ  $a (> 0)$  はアナライジング・ウェーブレット  $\Psi(t)$  を拡大/縮小する倍率でスケーリング係数と呼ばれ、パラメータ  $b$  は時間シフト (時間軸上のずれ) である。つまり、 $1/\sqrt{a}$  は正規化のための係数で、特に  $a=1$  (拡大/縮小なし)、 $b=0$  (時間シフトなし) に対するアナライジング・ウェーブレット  $\psi(t) = \Psi\left(\frac{t-0}{1}\right) = \Psi(t)$  は、“マザー・ウェーブレット”あるいは“基本ウェーブレット”ともいう。なお、連続ウェーブレット変換では、式 (9.2) のように信号を連続的に細かく分析する

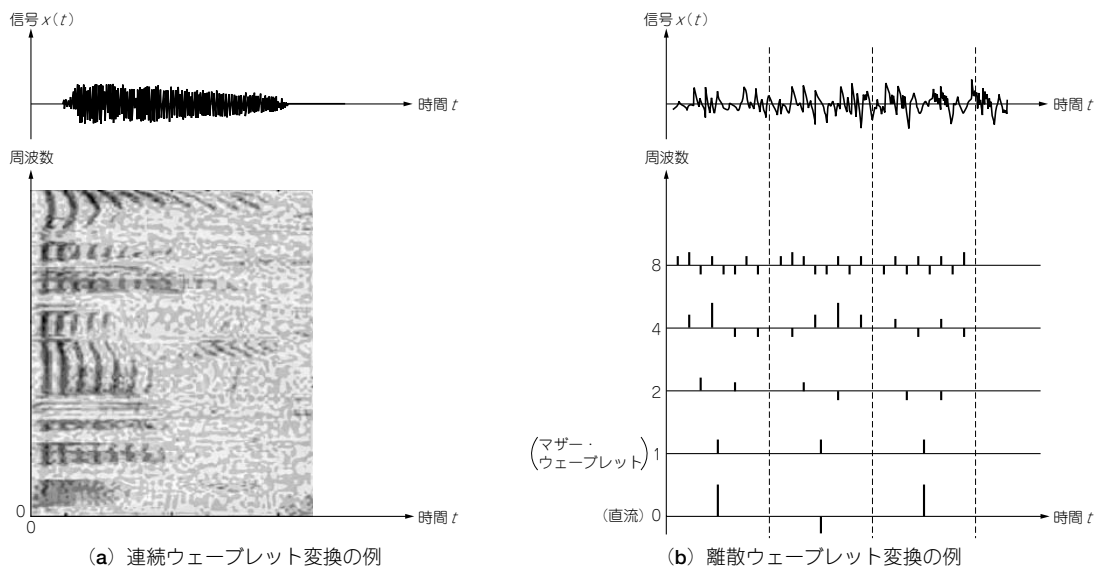


図9.6 ウェーブレット変換の種類

ため、次の離散ウェーブレット変換に比べて、計算時間が長くなる。

### ● 離散ウェーブレット変換

離散ウェーブレット変換では、ウェーブレットの縮尺 $a$ および時間軸方向のずらし時間 $b$ を離散的(とびとびの値)として、高速処理を実現する。例えば、変数 $a$ と $b$ を2進分割、すなわち、

$$a = 2^{L-\ell}, \quad b = k2^{L-\ell} \quad ; L \text{は正整数} \dots\dots\dots (9.3)$$

と離散化するとき、信号 $x(t)$ を $T$ [秒]ごとにサンプリングしたデジタル信号を $x_n = x(nT)$ で表せば、式(9.2)の連続ウェーブレット変換は、

$$X_\ell(k, b) = \frac{1}{\sqrt{2^{L-\ell}}} \sum_n x_n \overline{\Psi\left(\frac{t - k2^{L-\ell}}{2^{L-\ell}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2^{L-\ell}}} \sum_n x_n \overline{\Psi\left(\frac{t}{2^{L-\ell}} - k\right)} \dots\dots\dots (9.4)$$

となり、離散ウェーブレット変換と呼ばれる。ここで、正整数 $L$ が原信号のレベル(最も細かい信号データ)を表すものとするれば、変数 $\ell$ は多重解像度解析におけるレベルを意味する。つまり、レベル $\ell$ が大きいかほど細かい(高い周波数成分を含む形で原信号に近づく)信号データ表現であり、レベル $\ell$ を $(L-1)$ 、 $(L-2)$ 、 $(L-3)$ 、…のように小さくするとウェーブレットの横幅を2倍、さらにその2倍というように伸ばしていく(周波数では、半分、さらにその半分というように低くする)ことになるので、レベル $\ell$ が小さいほど粗い(高い周波数成分が含まれない)信号データ表現というわけである。

なお、離散ウェーブレット変換は逆変換も含めて、いずれの変換処理も簡略計算でき、高速処理が可能なことから、広範なデジタル信号処理分野で利用されている。ただし、離散ウェーブレット変換における時間軸方向および周波数軸方向の解像度は、連続ウェーブレット変換に比べると粗くなるので、細心の注意を払う必要がある。

## 9.2 階段状波形の再帰的な表現方法

まず，図9.7の基本単位ステップ波形を，

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq t < 1 \\ 0 & ; t < 0, 1 \leq t \end{cases} \dots\dots\dots (9.5)$$

で定義する．このとき，

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(k) = 0 & ; k \neq 0 \text{ の整数} \end{cases} \dots\dots\dots (9.6)$$

であり，

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1) \dots\dots\dots (9.7)$$

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1) \dots\dots\dots (9.8)$$

で表される関係を仮定してみよう (図9.8)．

以上より，式(9.6)の時間軸上でとびとびの値を初期値として， $\varphi(1/2)$ と $\psi(1/2)$ を算出してみたい．それには，式(9.7)と式(9.8)の關係に $t=1/2$ を代入すればよい．

$$\begin{cases} \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi(1) + \varphi(0) = \varphi(0) = 1 \\ \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi(1) - \varphi(0) = -\varphi(0) = -1 \end{cases} \dots\dots\dots (9.9)$$

続いて， $\varphi(1/4)$ と $\psi(1/4)$ ， $\varphi(3/4)$ と $\psi(3/4)$ を求めてみよう．式(9.7)と式(9.8)の關係に $t=1/4, 3/4$ を代入して式(9.5)を考慮し，式(9.9)を適用すると，

$$\begin{cases} \varphi\left(\frac{1}{4}\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + 0 = 1 \\ \psi\left(\frac{1}{4}\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) - 0 = 1 \end{cases} \dots\dots\dots (9.10)$$

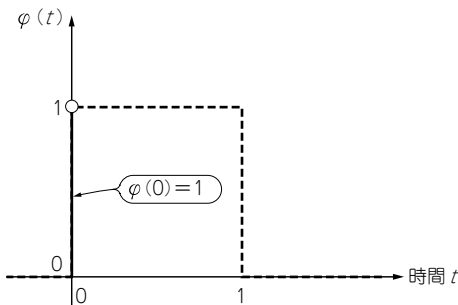


図9.7 基本単位ステップ波形 $\varphi(t)$

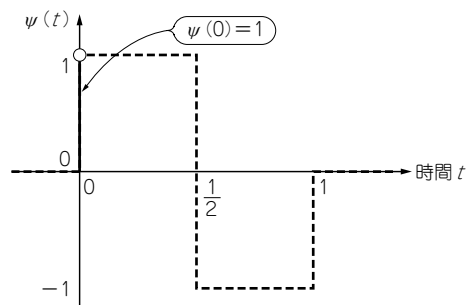
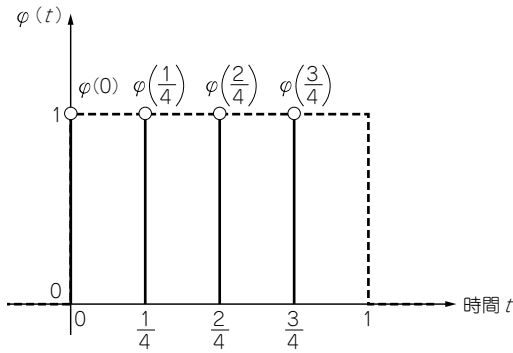
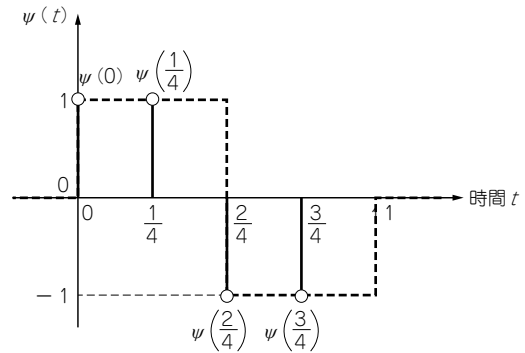


図9.8 マザー・ウェーブレット $\psi(t)$



(a) 基本単位ステップ波形  $\varphi(t)$



(b) マザー・ウェーブレット  $\psi(t)$

図9.9 再帰的な処理による信号表現例

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi\left(\frac{3}{4}\right) = \varphi\left(\frac{3}{2}\right) + \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ \psi\left(\frac{3}{4}\right) = \varphi\left(\frac{3}{2}\right) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \end{array} \right. \dots\dots\dots (9.11)$$

となり、式(9.6)の離散的なデータから、図9.7の基本単位ステップ波形 $\varphi(t)$ 、および図9.8のマザー・ウェーブレット $\psi(t)$ の詳細な情報が得られるのである(図9.9)。

**例題1**

式(9.9)～式(9.11)の処理を続けて、 $\varphi(k/8)$ と $\psi(k/8)$ の値( $k=1, 3, 5, 7$ )を求めよ。

**解答1**

式(9.7)と式(9.8)に基づき、式(9.5)を考慮して式(9.10)と式(9.11)を利用すればよい。以下に計算結果を示すので、各自で検証してもらいたい。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi\left(\frac{1}{8}\right) = \varphi\left(\frac{1}{4}\right) + \varphi\left(-\frac{3}{4}\right) = 1, \varphi\left(\frac{3}{8}\right) = \varphi\left(\frac{3}{4}\right) + \varphi\left(-\frac{1}{4}\right) = 1, \\ \varphi\left(\frac{5}{8}\right) = \varphi\left(\frac{5}{4}\right) + \varphi\left(\frac{1}{4}\right) = 1, \varphi\left(\frac{7}{8}\right) = \varphi\left(\frac{7}{4}\right) + \varphi\left(\frac{3}{4}\right) = 1 \end{array} \right. \dots\dots\dots (9.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi\left(\frac{1}{8}\right) = \varphi\left(\frac{1}{4}\right) - \varphi\left(-\frac{3}{4}\right) = 1, \psi\left(\frac{3}{8}\right) = \varphi\left(\frac{3}{4}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{4}\right) = 1, \\ \psi\left(\frac{5}{8}\right) = \varphi\left(\frac{5}{4}\right) - \varphi\left(\frac{1}{4}\right) = -1, \psi\left(\frac{7}{8}\right) = \varphi\left(\frac{7}{4}\right) - \varphi\left(\frac{3}{4}\right) = -1 \end{array} \right. \dots\dots\dots (9.13)$$

以上のように、式(9.7)と式(9.8)で定義した $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ は、式(9.9)～式(9.13)と同様の再帰的な処理により、限りなく正確に求めることができる(図9.10)。この再帰的な処理こそが、ウェーブレット変換そのものなのである。

それでは、具体的な数値例として、図9.11の階段状波形 $x(t)$ を、 $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ を利用して表してみよう。

まず、式(9.7)の関係を図示すると、図9.12が得られる。つまり、 $\varphi(2t)$ は $\varphi(t)$ の時間軸を1/2倍に縮めた





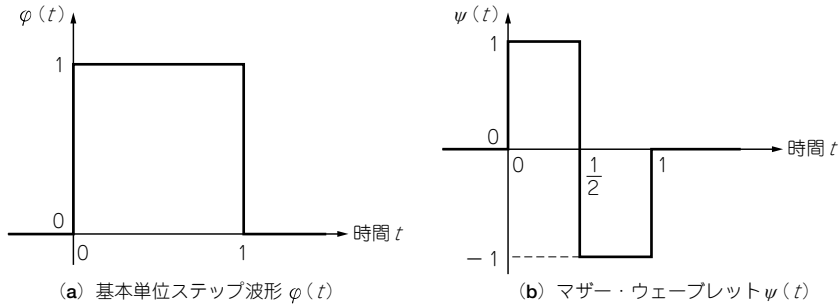


図9.10 再帰的な処理を無限に繰り返すと…

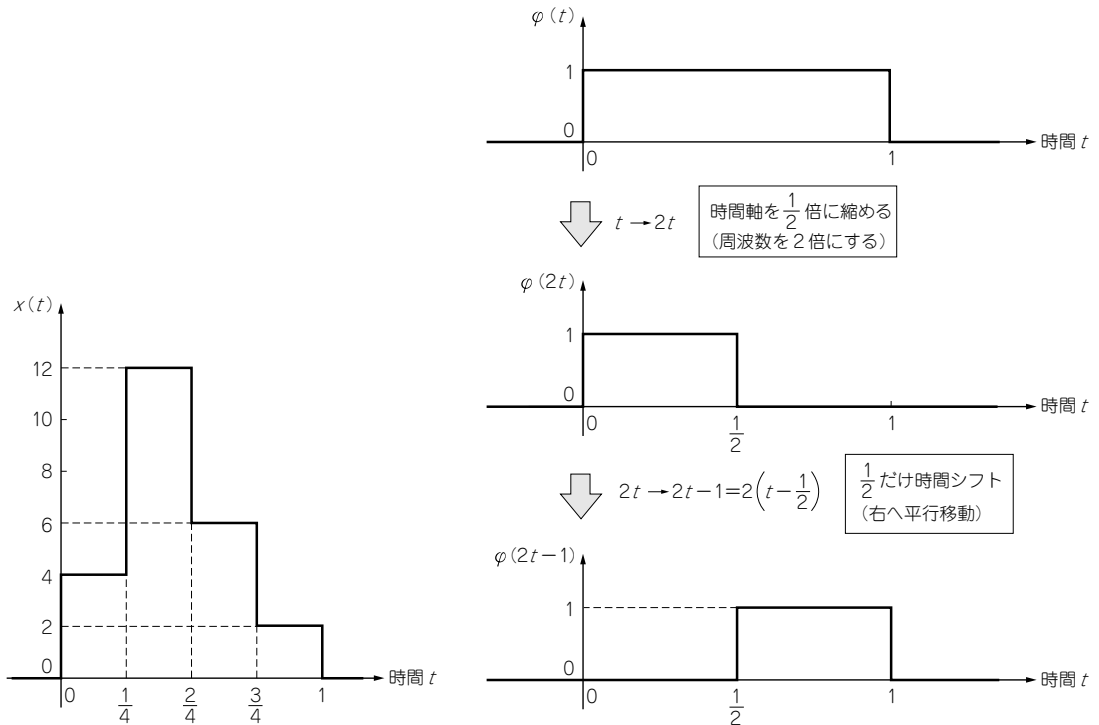


図9.11 階段状波形  $x(t)$

図9.12 基本単位ステップ  $\varphi(t)$  に対する時間シフトと周波数の伸縮

波形 (周波数は2倍) であり,  $\varphi(2t-1)$  は,

$$\varphi(2t-1) = \varphi\left(2\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)$$

という関係から,  $\varphi(2t)$  の波形を右に  $1/2$  だけ平行移動したものであることが分かる.

さらに続けて, 式 (9.7) と式 (9.8) の変数  $t$  に,  $2t$  および  $(2t-1)$  を代入すると,

$$\varphi(2t) = \varphi(4t) + \varphi(4t-1) \dots\dots\dots (9.14)$$

$$\psi(2t) = \varphi(4t) - \varphi(4t-1) \dots\dots\dots (9.15)$$



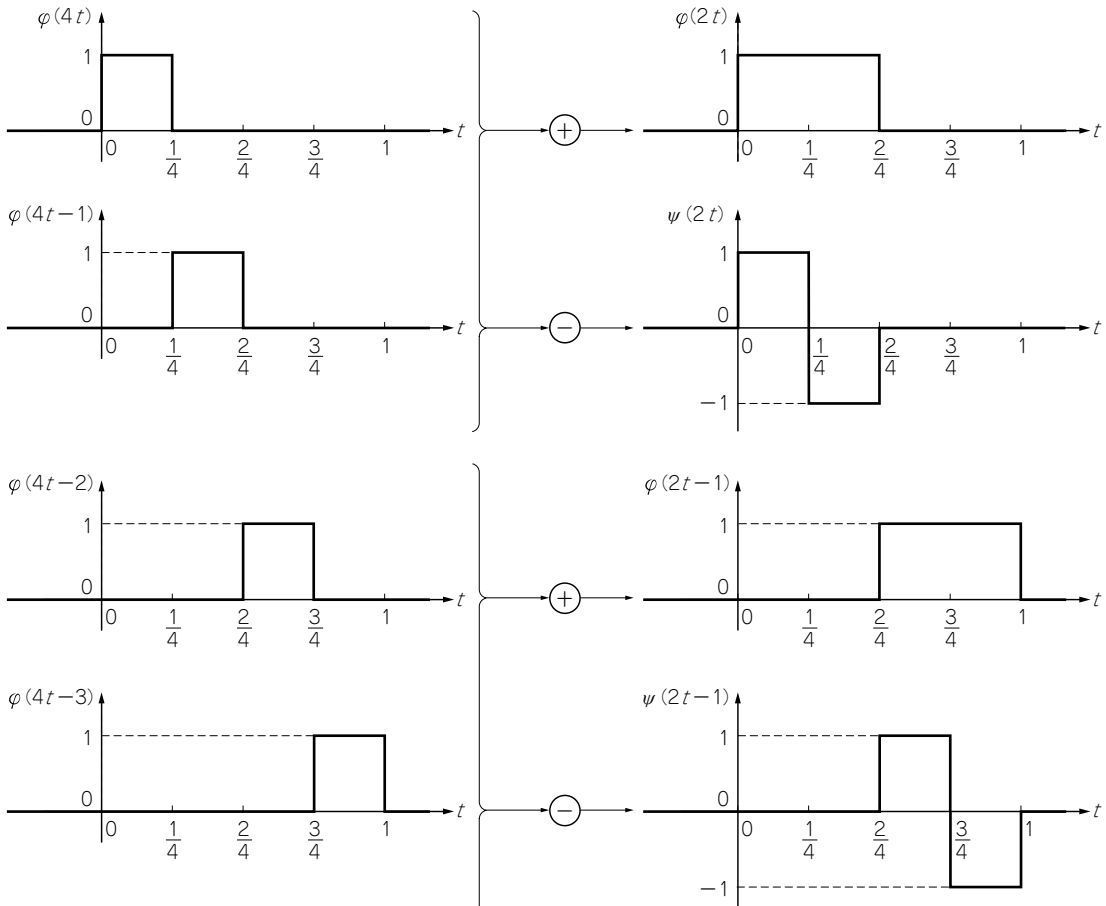


図9.13 時間シフトと周波数の伸縮によるウェーブレットの合成

$$\varphi(2t-1) = \varphi(4t-2) + \varphi(4t-3) \dots\dots\dots (9.16)$$

$$\psi(2t-1) = \varphi(4t-2) - \varphi(4t-3) \dots\dots\dots (9.17)$$

で表される関係が導かれる(図9.13). 図9.13より,  $\varphi(4t)$  は  $\varphi(t)$  の時間軸を1/4倍に縮めた波形(周波数は4倍)であり, 例えば  $\varphi(4t-1)$  は,

$$\varphi(4t-1) = \varphi\left(4\left(t - \frac{1}{4}\right)\right)$$

という関係から,  $\varphi(4t)$  の波形を右に1/4だけ平行移動したものであることが分かる. 同じように,  $\varphi(4t-2) = \varphi\left(4\left(t - \frac{2}{4}\right)\right)$  と  $\varphi(4t-3) = \varphi\left(4\left(t - \frac{3}{4}\right)\right)$  はそれぞれ2/4(=1/2), 3/4だけ右に平行移動した波形である.

以上の考察から,

$$x(t) = 4\varphi(4t) + 12\varphi(4t-1) + 6\varphi(4t-2) + 2\varphi(4t-3) \dots\dots\dots (9.18)$$

と表される(図9.14).