伝達関数と周波数特性の関係をローパス・フィルタから理解しよう

第6章 各種プロトタイプ・フィルタ

本章では，各種フィルタの伝達関数と周波数特性の相互関係を理解してもらうことから説明を始める．まず，フィルタ設計のプロトタイプ(基準フィルタ)として，ローパス・フィルタ(バタワース形，チェビシェフ形，逆チェビシェフ形，連立チェビシェフ形)にフォーカスして解説する．その際，フィルタの伝達関数を構成する零点と極，周波数特性(利得，位相)などを取り上げ，Scilabで検証してもらう．

6.1 バタワース形フィルタ

アナログ・フィルタには，前述のようにLPF，HPF，BPF，BEFなどがありますが，プロトタイプの基準ローパス・フィルタ（遮断周波数 ω_c=1［rad/秒］）から周波数変換によって容易に得ることができます．

さて，アナログ・フィルタの理想的ローパス特性は，**図6.1**に示すように，

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} 1 & (0 \leqq \omega \leqq \omega_c) \\ 0 & (\omega_c \leqq \omega) \end{cases} \qquad (6.1)$$

で与えられます．

このような理想的ロ－パス特性を近似する N 次のバタワース特性は，

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}} \qquad (6.2)$$

ただし，N はフィルタの次数，ω_c は遮断周波数

によって与えられます．ここで，上式をテーラー級数（マクロリーン級数）に展開すると，

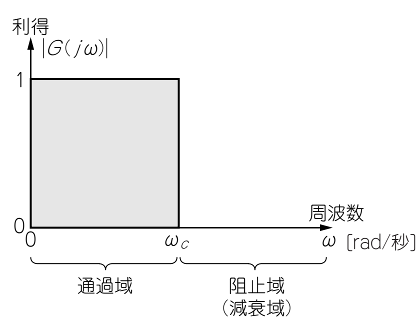

図6.1
理想的ローパス特性

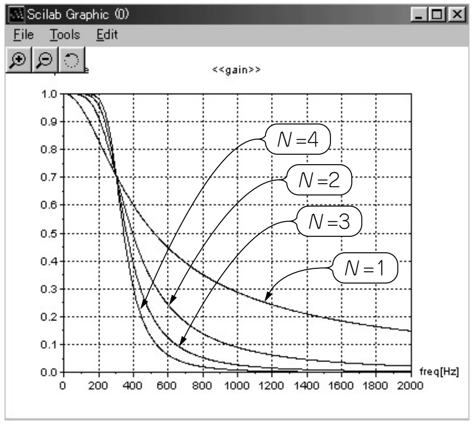

図 6.2
バタワース形 LPF の次数と遮断特性の関係

$$|G(j\omega)| = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N} + \frac{3}{8}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{4N} - \frac{5}{16}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{6N} + \cdots \qquad (6.3)$$

となり，直流点 ($\omega = 0$) における導関数は次のように計算されます．

$$\left.\frac{d^k|G(j\omega)|}{d\omega^k}\right|_{\omega=0} = 0 \qquad ;k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2N-1$$

$$\left.\frac{d^{2N}|G(j\omega)|}{d\omega^{2N}}\right|_{\omega=0} = -\frac{1}{2}(2N)\times(2N-1)\times\cdots\times 2\times 1 \neq 0$$

このように ($2N-1$) 次までの導関数がすべて 0 (零) に等しいことから最大平坦特性として知られ，式 (6.2) の次数 N を大きくするほど理想的なローパス特性に近づくことがわかります (**実行例 6.1**，**図 6.2** では遮断周波数 $\omega_c = 2\pi \times 300$ [rad/秒] で 300 [Hz] に相当)．

実行例 6.1

```
-->xbasc();↵                      …………………グラフ表示画面の設定
-->butt(1,300,0:2000);↵           …………………次数 N = 1
-->butt(2,300,0:2000);↵           …………………次数 N = 2
-->butt(3,300,0:2000);↵           …………………次数 N = 3
-->butt(4,300,0:2000);↵           …………………次数 N = 4
```

それでは，Scilab を利用して，バタワース特性を有する基準 LPF ($\omega_c = 1$ [rad/秒]) の伝達関数 $G(s)$ を求め，周波数特性のグラフを表示してみてください．さらに，極と零点の値，s 平面上の位置も調べてみましょう (**実行例 6.2**，**図 6.3**)．

実行例 6.2

```
-->[pols,gain]=ppbutt(3,1)↵       …………………①
 gain  =
    1.
  pols  =
! - 0.5 - 0.8660254i!
! - 1               !
```