2-2　２次元衝突と運動量保存の法則 図2-3

● 球１，２の衝突前後の運動量と重心座標の計算注2-1

質量 m_1，m_2，半径 r_1，r_2 の二つの球が，**図2-4** のＯ点で衝突(反発係数 e)するものとする．

▶ 衝突前後の球１，２の運動量

Ｏ点で両球が衝突したとき，**作用・反作用の法則**により互いの中心向きに大きさの等しい力 F，$-F$ をおよぼし合うため，速度の y 成分は変化するが，x 成分は変化しない．**図2-4** の中の記号を用いて衝突前後の速度成分は次のようになる．球１，２に関する量にはそれぞれ添え字１，２を，また衝突前に関する量は添え字Ｆ(Former)，衝突後に関する量にはＬ(Latter)を付けてある．

まず衝突前の速度の x 成分を，

$$v_{1xF} = v_{2xF} = u \quad \cdots\cdots (2\text{-}7)$$

とすると，球１，２の衝突前の速度の y 成分は**図2-4** より，

$$v_{1yF} = -\frac{ud_1}{x_0},\quad v_{2yF} = \frac{ud_2}{x_0} \quad \cdots\cdots (2\text{-}8)$$

となる．衝突したとき x 方向には力を受けないので，両球の衝突後の速度の x 成分は変化しない：

$$v_{1xL} = v_{2xL} = u \quad \cdots\cdots (2\text{-}9)$$

衝突前後の球１，２の運動量の y 成分に**運動量保存の法則**を適用して，

$$m_1v_{1yF} + m_2v_{2yF} = m_1v_{1yL} + m_2v_{2yL} \quad \cdots\cdots (2\text{-}10)$$

が成立する．また，y 方向の速度成分に**反発係数の式**を適用すると，

$$v_{1yL} - v_{2yL} = -e(v_{1yF} - v_{2yF}) \quad \cdots\cdots (2\text{-}11)$$

が得られる．式(2-10)，(2-11)を連立方程式として衝突後の球１，２の速度の y 成分 v_{1yL}, v_{2yL} を求めると，

$$v_{1yL} = \frac{(m_1 - em_2)v_{1yF} + (1 + e)m_2v_{2yF}}{m_1 + m_2} \quad \cdots\cdots (2\text{-}12)$$

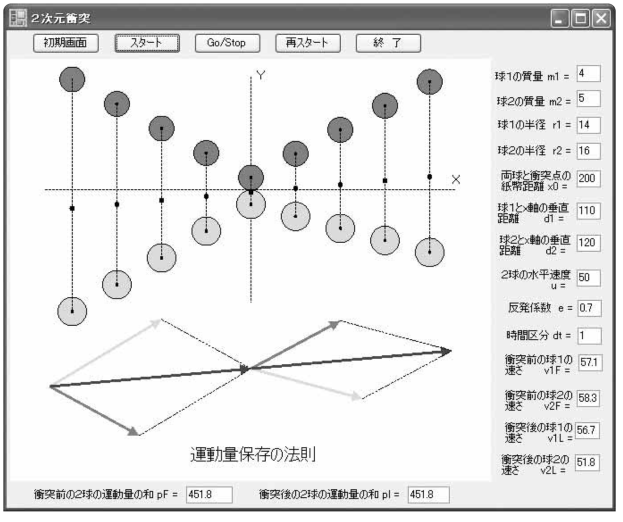

図2-3　リスト2-2の実行画面例

注2-1：本節の計算には次の文献を参考にした．
山内恭彦ほか編『大学演習・力学』，(裳華房)，1957年10月，p.134.

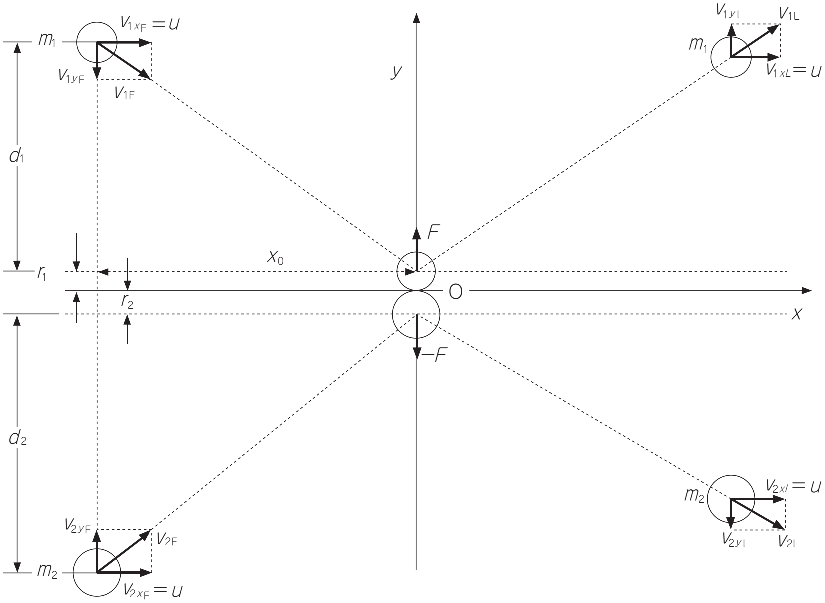

図2-4　２次元衝突の説明図

$$v_{2yL}=\frac{(1+e)m_1v_{1yF}+(m_2-em_1)v_{2yF}}{m_1+m_2} \quad\cdots\cdots(2\text{-}13)$$

が得られる．これらの速度成分を用いて，衝突前後の球１，２の速度の値は次の式で求められる：

衝突前：$v_{1F}=\sqrt{u^2+v_{1yF}{}^2}$，$v_{2F}=\sqrt{u^2+v_{2yF}{}^2}$ ……(2-14)

衝突後：$v_{1L}=\sqrt{u^2+v_{1yL}{}^2}$，$v_{2L}=\sqrt{u^2+v_{2yL}{}^2}$ ……(2-15)

また，衝突後の２球の運動量の和は次のように求まる：

衝突前の運動量の和：$p_F=\sqrt{p_{xF}{}^2+p_{yF}{}^2}$ ……(2-16)

$p_{xF}=m_1u+m_2u$，$p_{yF}=m_1v_{1yF}+m_2v_{2yF}$

衝突後の運動量の和：$p_L=\sqrt{p_{xL}{}^2+p_{yL}{}^2}$ ……(2-17)

$p_{xL}=m_1u+m_2u$，$p_{yL}=m_1v_{1yL}+m_2v_{2yL}$

球１，２の運動量の和の x，y 成分が保存しているので，p_F，p_L は当然等しい．このことは**図 2-3** の実行図で，衝突前後の運動量の合成ベクトル（青線）が等しいことで確かめられ，またその下のテキストボックスに値が表示されている．

▶ 衝突前後の球１＋球２系の重心（G）の座標

衝突前の球１，２の位置をそれぞれ，$(x_{1F},\ y_{1F})$，$(x_{2F},\ y_{2F})$ とすると，衝突前の球１＋球２系の重心座標 $(x_{GF},\ y_{GF})$ は，

$$x_{GF}=\frac{m_1x_{1F}+m_2x_{2F}}{m_1+m_2},\quad y_{GF}=\frac{m_1y_{1F}+m_2y_{2F}}{m_1+m_2} \quad\cdots\cdots(2\text{-}18)$$

となる．同様に，衝突後の球１，２の位置をそれぞれ，$(x_{1L},\ y_{1L})$，$(x_{2L},\ y_{2L})$ とすると，重心座標 $(x_{GL},\ y_{GL})$ は，

$$x_{GL}=\frac{m_1x_{1L}+m_2x_{2L}}{m_1+m_2},\quad y_{GL}=\frac{m_1y_{1L}+m_2y_{2L}}{m_1+m_2} \quad\cdots\cdots(2\text{-}19)$$

となる．この２式を時間微分すると，速度成分についての式が得られる．これに運動量保存の法則を用いて，

$v_{xGF} = v_{xGL}$, $v_{yGF} = v_{yGL}$ ……………………………………………………………………………………(2-20)

が得られる．この結果，衝突前後で両球の重心が等しい速度で直進することになる(**図 2-3**)．

● プログラムの解説(リスト 2-2)

▶ **初期画面プロシージャ**の中で，両球の質量，半径などの既定値を与え，準備として速度，運動量の x，y 成分，さらに和を計算して，テキストボックスに表示しておく．また，**Zahyo プロシージャ**を呼び出して座標軸と両球の初期像を描いておく．

▶ スタートボタンをクリックすると，**Timer1 プロシージャ**に移り，衝突前の両球と重心が一定時間(`dt=1`)ごとに表示され，画面の中心で衝突した後，一定時間ごとに表示れていく．

▶ **再スタートプロシージャ**で条件を再設定するが，特に中心点 O で衝突させるため，時間 `t0=x0/u` が整数値をとるように `x0` と `u` 値を選ぶ．

▶**Timer1 プロシージャ**では，`dt=1s` ごとに両球の位置を表示し，時刻 `t0=x0/u` に中心 O 点で衝突した

column 2-1 ガリレオ・ガリレイの着想

高校物理 I では必ず**自由落下**が扱われ，生徒は「速度が落下時間とともに一定の割合(重力加速度)で増していく」ことを実験で，あるいは実験事実として，そしてガリレオ・ガリレイの功績として学ぶ. ガリレオ・ガリレイの『新科学対話(下)』(岩波文庫)によると，そう簡単ではない.

彼はまず，**等加速度運動**を時間 t とともに速度 v が一様に増す運動と定義する(前掲書 p.16)：

$$v = at \quad (\text{定数}\,a\,\text{は加速度}) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(A-1)}$$

ガリレオ・ガリレイは，現実に起こる自由落下を考察し，それが等加速度運動であるという確信的仮説を立てる(同 p.14)．彼の仮説の検証法を追ってみよう．彼は次の(**定理 1**)(同 p.35)をおく．

(**定理 1**)物体が静止から出発して等加速度運動するとき，時間 t に進む距離 S は最初と最後の速さ v の平均値 $(0+v)/2 = v/2$ に等しい速さで等速運動する距離に等しい：

$$S = (v/2) \times t \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(A-2)}$$

ところが, この最後の瞬間の速さ v を測ることは, 微小時間測定の技術を持たない当時では不可能であった. 彼はこの定理をどのように証明したのか. 式(A-1)を式(A-2)に代入すると,

$$S = (1/2)at^2 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(A-3)}$$

が得られる．これを基に，ガリレオ・ガリレイは次の(**定理 2**)(同 p.37)をおく．(**定理 2**)静止から等加速度運動して落下する物体が通過する距離 S はそれらの距離の経過時間 t の 2 乗に比例する．

式(A-3)から，等加速度直線運動体の一定時間(例えば 1 秒)ごとの隣り合う位置の間隔は

$$S(1) - S(0) = a/2,\ S(2) - S(1) = 3a/2,\ S(3) - S(2) = 5a/2,\ S(4) - S(3) = 7a/2,\ \cdots\cdots$$

となり，1：3：5：7 等の奇数比をなすことが導かれる．ガリレオ・ガリレイはこれを(**系 1**)とした(同 p.38)．この系 1 を確かめることは比較的やさしい．具体的な検証実験は，自由落下の代わりに斜面をゆっくり転がる球の運動で行った．今では，斜面上の奇数比の間隔位置に鈴を下げ，球を転がして一定時間ごとに鈴をはじく音を聞く実験がよく行われる．

現在のように等加速度直線運動を式(A-1)〜(A-3)で表し，直交座標(デカルト座標)でグラフ化して解析するよりもはるか以前に，ガリレオ・ガリレイはこの運動の本質を把握し，言葉による定義や定理で表現していたのである．ガリレオ・ガリレイが時代を超え現代に生きる運動学を最初に着想し，それを巧妙な実験法で最初に実証したことが, 彼が最大級の天才とされるゆえんである．

(文献) ガリレオ・ガリレイ著, 今野武雄ほか訳『新科学対話(下)』(岩波書店)，1948 年 4 月．