

## 第2章 進行波, 反射波, 反射係数, 定在波比, インピーダンス (又はアドミッタンス) とスミス図表

### 2.1 進行波, 反射波, 反射係数と定在波比

第1章では電波が電源から線路上を負荷方向（電源と反対方向）に向かってゆく進行波について述べた。アンテナから放射された電波が山や建物によって反射されて反射波が生じるように、線路を伝播する電波が線路の負荷に到達したとき、負荷抵抗が前述の特性インピーダンスでない場合にはそこで反射波が発生されて電源方向に向かう。もし線路に減衰がある場合、正弦波の振幅も波が進むにつれて減衰するので進行波の場合は負荷側の方が振幅が小さく、反射波の場合は電源側の方が振幅は小さい。この模様を描くと図2.1の如くなる。

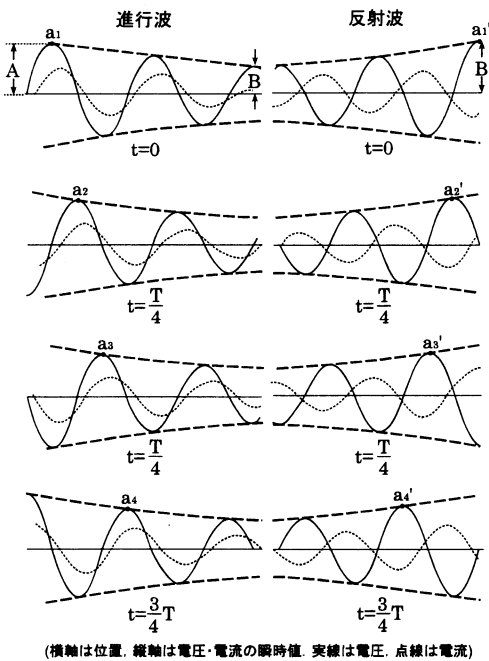


図 2.1 進行波, 反射波の電圧・電流分布が時間の経過とともに移り変わる模様

図2.1において減衰のある線路の負荷側に進んで、負荷において反射した場合には、同図で

$$A > B$$

となる。また時間と共に電圧最大点は  $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_4$  と移動してゆくことがわかる。そして実際の電圧及び電流はこれらの進行波と反射波の和である。

いま  $t = 0, z = 0$  の進行波電圧及び電流を 1.2 の (1.1-c) 及び (1.1-d) 式で  $\dot{V}_+(t = 0, z = 0)$  及び  $\dot{I}_+(t = 0, z = 0)$  で示し、時間  $t$  における  $z$  の電圧及び電流を  $\dot{V}_+(t, z)$  及び  $\dot{I}_+(t, z)$  で示すと、

$$\dot{V}_+(t, z) = \dot{V}_+(t = 0, z = 0)e^{j\omega t - \gamma z} \quad (2.1-a)$$

$$\dot{I}_+(t, z) = \frac{\dot{V}_+(t = 0, z = 0)}{Z_c} e^{j\omega t - \gamma z} \quad (2.1-b)$$

となる。次に負荷で反射して生じた反射波の  $t = 0, z = 0$  における電圧及び電流をそれぞれ  $\dot{V}_-(t =$

$0, z = 0$ ) 及び  $\dot{I}_-(t = 0, z = 0)$  で示し, 時間  $t$  における  $z$  の電圧及び電流を  $\dot{V}_-(t, z)$  及び  $\dot{I}_-(t, z)$  で示すと

$$\dot{V}_-(t, z) = \dot{V}_-(t = 0, z = 0)e^{j\omega t + \gamma z} \quad (2.1-c)$$

$$\dot{I}_-(t, z) = -\frac{\dot{V}_-(t = 0, z = 0)}{Z_c} e^{j\omega t - \gamma z} \quad (2.1-d)$$

となる. ここで  $\dot{I}_-$  の符号が負になっているのは負荷から電源に向かう電流は逆向きになるからである. 電圧反射波を電圧進行波で除した値を電圧反射係数と呼ぶ. この  $\dot{\Gamma}$  は  $z$  により異なり, この値は (2.1-a) 式と (2.1-c) 式より

$$\dot{\Gamma}(z) = \dot{\Gamma}(z = 0)e^{2\gamma z} \quad (2.2)$$

となる. いま線路上の電圧は  $\dot{V}_+(z) + \dot{V}_-(z)$  であるから, これを  $\dot{V}(z)$  で示し, また電流を  $\dot{I}(z)$  で示すと (2.1-a)~(2.1-d) 式より

$$\dot{V}(t, z) = \dot{V}_+(t = 0, z = 0) \{1 + \dot{\Gamma}(z)\} e^{j\omega t} \quad (2.3-a)$$

$$\dot{I}(t, z) = \frac{\dot{V}(t = 0, z = 0)}{Z_c} \{1 - \dot{\Gamma}(z)\} e^{j\omega t} \quad (2.3-b)$$

となる. さて  $\dot{V}_\pm(t, z)$  及び  $\dot{I}_\pm$  を複素平面上のベクトル図で表すと, 図 2.2 のようになる. これより  $\dot{V}_+ + \dot{V}_-$  は同図の (c) のように,  $z$  の位置を変えると電圧最大値  $V_{\max}$  と最小値  $V_{\min}$  を繰り返し, その間隔は電気角で  $\pi/2$  で線路長で  $\lambda_g/4$  であることがわかる. 従って電圧最大点または電圧最小点間は  $\lambda_g/2$  の長さで繰り返すことがわかる. いま種々の負荷に対して,  $|\dot{V}_+(z) + \dot{V}_-(z)|$  を描くと図 2.3 の如くなる. これからも上記の事がわかる.

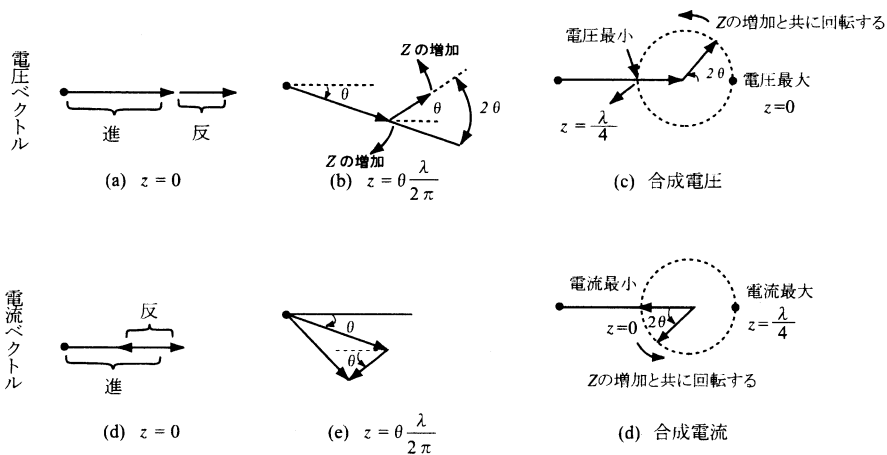


図 2.2 進行波と反射波の電圧及び電流ベクトル

# 見本

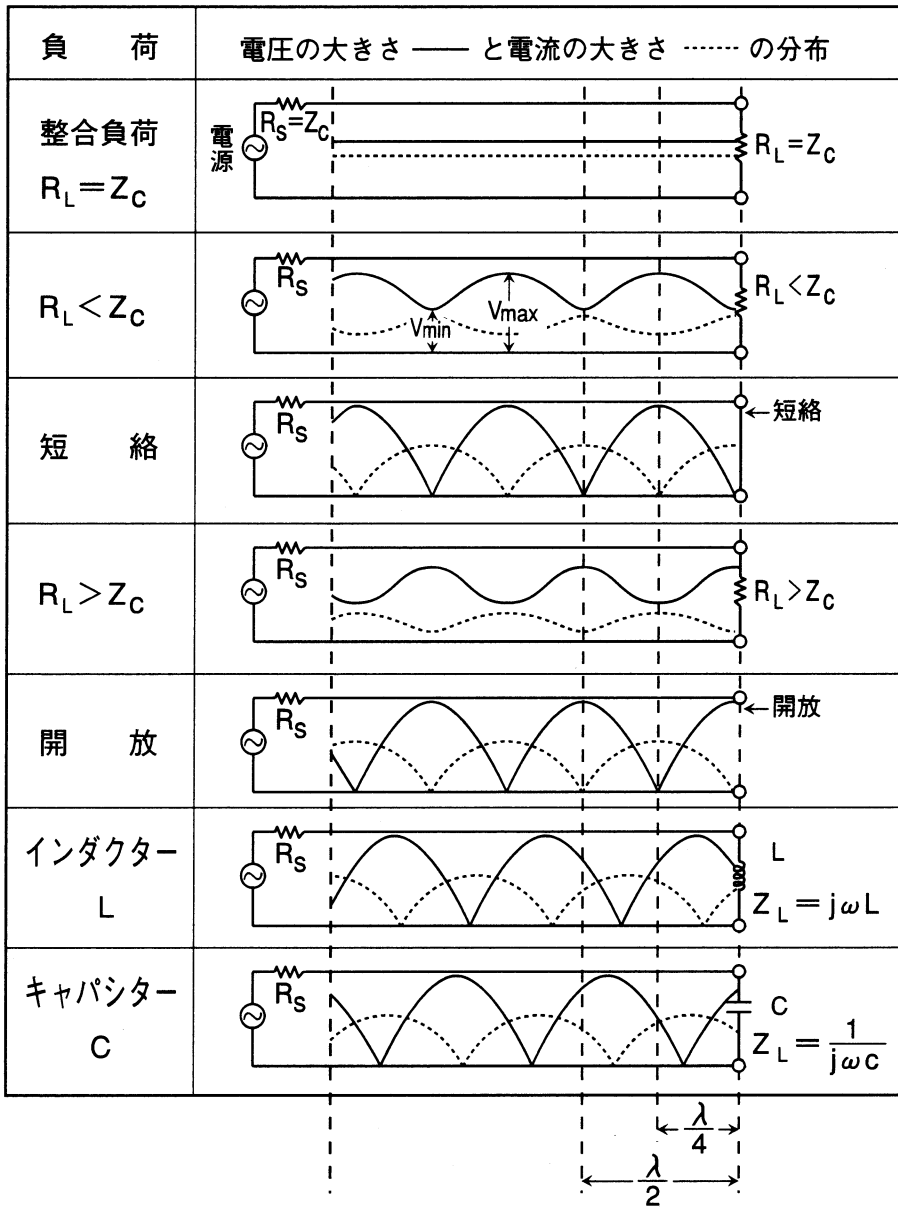


図 2.3 種々の負荷に対する分布定数線路上の電圧・電流分布 [Vol.1,P.24, 図.12]

また  $V_{max}/V_{min}$  の事を電圧定在波比と呼び V.S.W.R(Voltage Standing Wave Ratio) で示される. いま  $|\Gamma| = \Gamma$  で示すと図 2.2(c) のベクトル図でわかるように進行波と反射波が同位相の時に  $V_{max}$  を示し, ( $\because |\dot{V}| = \dot{V}_+ + \dot{V}_-$ ) また逆位相のときに  $V_{min}$  を示すから

$$V.S.W.R = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} > 1 \tag{2.4}$$

となる.

次に負荷の両端の電圧を  $\dot{V}_L$ , 電流を  $\dot{I}_L$  とし, 負荷インピーダンスを  $\dot{Z}_L$  とすると (2.3-a) 及び (2.3-b) 式で

$$\dot{Z}_L = \frac{1 + \dot{\Gamma}_L}{1 - \dot{\Gamma}_L} Z_c, \quad \dot{\Gamma}_L = \frac{\dot{Z}_L - Z_c}{\dot{Z}_L + Z_c} \quad (2.5)$$

となる.  $\dot{Z}_L = R_c$ ,  $R_L < R_c$ ,  $R_L > R_c$ ,  $0$ ,  $\infty$ ,  $jx$  につき V.S.W.R. を求めると表 2.1 のようになる.

表 2.1 負荷インピーダンスとその反射係数並びにそれを負荷した線路の定在波比

$\dot{Z}_L$	V.S.W.R.	$\dot{\Gamma}$	図 2.2 のスミス図表上での位置
$Z_c$	1	0	①
$R_L < Z_c$	$Z_c/R_L$	$-1 < \frac{R_L - Z_c}{R_L + Z_c} < 0$	② $R_L/Z_c = 0.3$ の例
$R_L > Z_c$	$R_L/Z_c$	$0 < \frac{R_L - Z_c}{R_L + Z_c} < 1$	③ $R_L/Z_c = 3$ の例
0	$\infty$	-1	④
$\infty$	$\infty$	1	⑤
$j\omega L$	$\infty$	$ \dot{\Gamma}  = 1, 0 < \arg \dot{\Gamma} < \pi$	⑥ $\omega L/Z_c = 0.6$ の例
$1/j\omega C$	$\infty$	$ \dot{\Gamma}  = 1, -\pi < \arg \dot{\Gamma} < 0$	⑦ $1/\omega C Z_c = 2$ の例

## 2.2 インピーダンス (又はアドミッタンス) とスミス図表

図 2.3 でわかるように実線で示した電圧を点線で示した電流で割って得られるインピーダンス (負荷側を見た値) は負荷が  $Z_c$  以外の場合, 線路の位置によって変化する.

そしてその値は  $\lambda_g/2$  の線路長おきに同じ値をとる. これを式で求めると, (2.3-a) 及び (2.3-b) 式より (2.6-a) 式となる.

$$\dot{Z}(z) = Z_c \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \quad (2.6-a)$$

いま  $z = l$  の所に  $\dot{Z}_L$  の負荷を接続すると, (2.5) 式と (2.2) 式より

$$\begin{aligned} \dot{Z}'(z=0) &= \frac{\dot{Z}(z=0)}{Z_c} = \frac{1 + e^{-2\gamma l} \dot{\Gamma}_L}{1 - e^{-2\gamma l} \dot{\Gamma}_L} \\ &= \frac{\dot{Z}_L + Z_c \tanh \gamma l}{Z_c + \dot{Z}_L \tanh \gamma l} \end{aligned} \quad (2.6-b)$$

ここで  $\dot{Z}'$  は  $Z_c$  で正規化した値である. 従って正規化アドミッタンス  $\dot{Y}'(z=0)$  は (2.6-c) 式となる.

$$\dot{Y}'(z=0) = \frac{\dot{Y}(z=0)}{Y_c} = \frac{1 - e^{-2\gamma l} \dot{\Gamma}_L}{1 + e^{-2\gamma l} \dot{\Gamma}_L} \quad (2.6-c)$$

(2.6-b) 式を用いて, 実際によく使用される実例を述べる.

## 2.2.1 先端短絡された無損失線路の入力インピーダンス

$\gamma = j2(\pi/\lambda_g)$  となるから, 入力インピーダンス  $\dot{Z}_{in}$  は

$$\dot{Z}_{in} = jZ_c \tan \frac{2\pi}{\lambda_g} l = jZ_c \tan \frac{\omega}{v_p} l \quad (2.7-a)$$

$l \ll \lambda_g$  の時は (1.2-g) 式を用いて

$$Z_{in} \simeq j\omega \frac{Z_c}{v_p} l = j\omega Ll \quad [L \text{ は単位長のインダクタンス}] \quad (2.7-b)$$

## 2.2.2 先端開放された無損失線路の入力インピーダンス

$$Z_{in} = \frac{1}{j \tan \frac{2\pi}{\lambda_g} l} \quad (2.7-c)$$

$l \ll \lambda_g$  の時は (1.2-g) 式を用いて

$$Z_{in} = \frac{Z_c}{j\omega Cl} \quad (2.7-d)$$

2.2.3 先端に負荷抵抗  $Z_L$  を接続した  $\lambda_g/4$  無損失線路の入力インピーダンス

$$Z_{in} = \frac{Z_c^2}{Z_L} \quad (2.7-e)$$

となる故,  $Z_c$  の値により入力インピーダンスが変わる. 従って入力インピーダンスの調整によく用いられる. これは変成器の変成比を変えて  $Z_{in}$  を変えるのと同じ効果であるので,  $\lambda/4$  変成器とも呼ばれる.

2.2.4 先端短絡  $\lambda_g/4$  線路の入力インピーダンス

(2.7-a) 式より  $\dot{Y}_{in}$  は  $\dot{Y}_{in} = -jY_c \cot(\omega/v_p)l$  となり, 中心角周波数  $\omega_0$  では  $(\omega_0/v_p)l = (2\pi/\lambda_g) \times (\lambda_g/4) = \pi/2$  となるから  $Y_{in} = 0$  となるため, 入力インピーダンスは無限大となる.

次に  $\omega$  が  $\omega_0 + \Delta\omega$  とずれた時は

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{in} &= -jY_c \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\omega}{v_p} l\right) = -jY_c \tan\left(-\frac{\Delta\omega}{v_p} l\right) \\ &\simeq j \frac{\Delta\omega}{Z_c v_p} l = j2\Delta\omega \cdot C_p, \\ C_p &= \frac{\pi}{4\omega_r Z_c}, \quad L_p = \frac{1}{\omega_r^2 C_p} \end{aligned} \quad (2.7-f)$$

となるので, (2.7-f) 式の  $C_p$  は  $L_p$  の並列共振回路と等価に近似できる. [ここで  $\omega_r$  は先端短絡  $\lambda_g/4$  線路の共振角周波数]

### 2.2.5 先端開放 $\lambda_g/4$ 線路の入力インピーダンス

(2.7-c) 式より中心角周波数  $\omega_r$  では  $Z_{in} = 0$  となるが  $\omega_r + \Delta\omega$  で考察すると, 2.2.4 と同様の手法で

$$\dot{Z}_{in} = 2j\Delta\omega \cdot L_s, \quad L_s = \frac{\pi Z_c}{4\omega_r}, \quad C_s = \frac{1}{\omega_r^2 L_s} \quad (2.7-g)$$

となる. 従って (2.7-g) 式の  $L_s$  と  $C_s$  との直列共振回路と等価に近似できる.

### 2.2.6 先端短絡 $\lambda_g/2$ 線路の入力インピーダンス

中心角周波数では  $Z_{in} = 0$  となる. これはインピーダンスは 2.2 で述べたように  $\lambda_g/2$  おきに繰り返すからである. しかし  $\omega_0 + \Delta\omega$  ( $\Delta\omega \ll \omega_r$ ) の  $Z_{in}$  を同じ手法で検討すると, これは

$$L_s = \frac{\pi Z_c}{2\omega_r}, \quad C_s = \frac{1}{\omega_r^2 L_s} \quad (2.7-h)$$

の  $L_s$  と  $C_s$  との直列共振回路になることがわかる.

### 2.2.7 先端開放 $\lambda_g/2$ 線路の入力インピーダンス

$\lambda_g/2$  おきに開放インピーダンスが繰り返すから, 中心角周波数  $\omega_r$  では無限大となる. また  $\omega_0 + \Delta\omega$  を前と同様の手法で検討すると

$$C_p = \frac{\pi}{2\omega_r Z_c}, \quad L_p = \frac{1}{\omega_r^2 C_p} \quad (2.7-i)$$

の並列共振回路になる事がわかる. 以上の例を表にまとめると [1-1] の P.15 となる.

さて (2.6-a) 式より  $\dot{\Gamma}(z)$  がわかれば  $\dot{Z}(z)$  がわかる. また

$$|\dot{\Gamma}| \leq 1 \quad (2.8)$$

である事を考えると, 反射係数  $\dot{\Gamma}$  を複素平面上に印すと, それに対応して (2.6-a) 式で求まる正規化インピーダンス  $\dot{Z}/Z_c$  がある筈である. いまこの実部を  $R'$ , 虚部を  $X'$  とすると,  $R'$  一定及び  $X'$  一定の軌跡を目盛った図表が出来るはずである. この図表は図 2.4 のようになり, これはスミス図表と呼ばれる. これでわかるように  $R'$  一定の軌跡は複素平面の実軸上に中点をもつ円になり, また  $X'$  一定の軌跡は複素平面の +1 の位置で実軸に垂直な直線上に中心をもつ円となる. 同様に  $\dot{Y}/Y_c$  は図 2.5 のようになる. これらの図表は第 3 章の回路の整合の説明や方法によく用いられる.

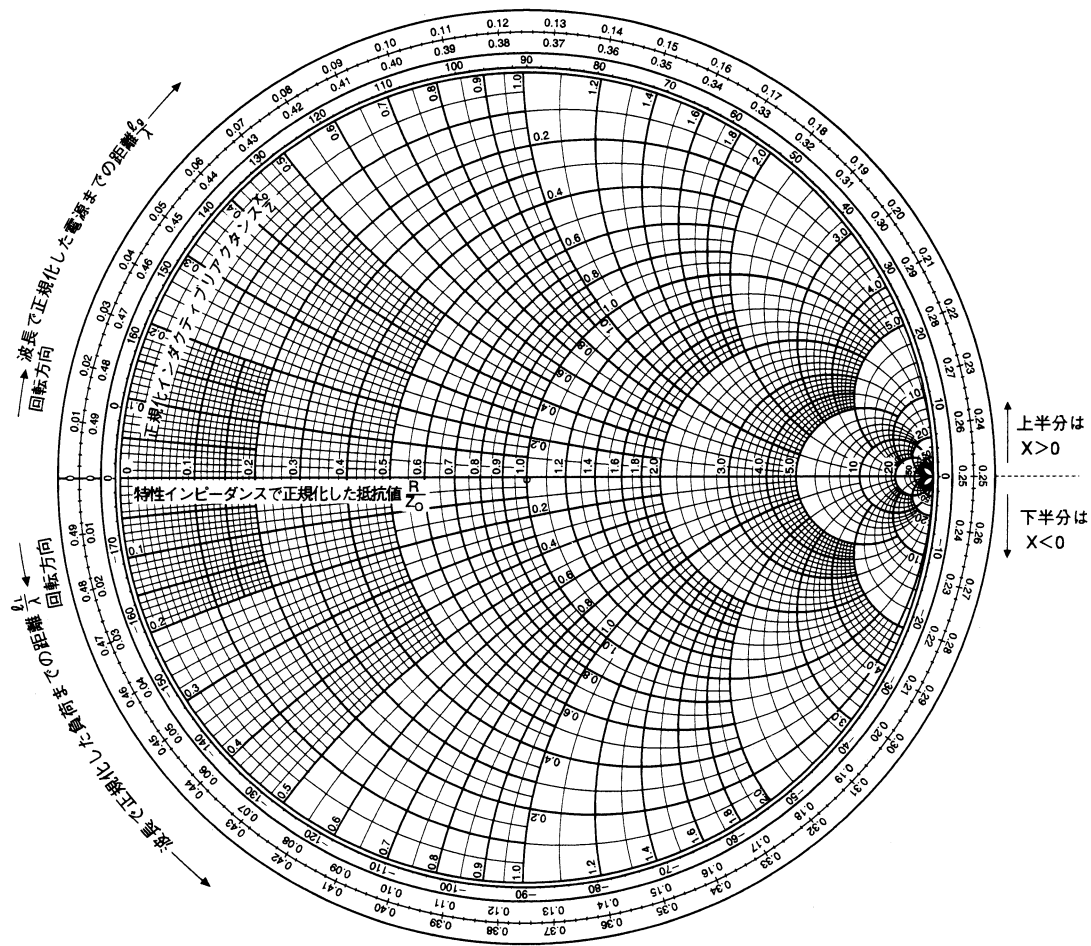


図 2.4 インピーダンススミス図表

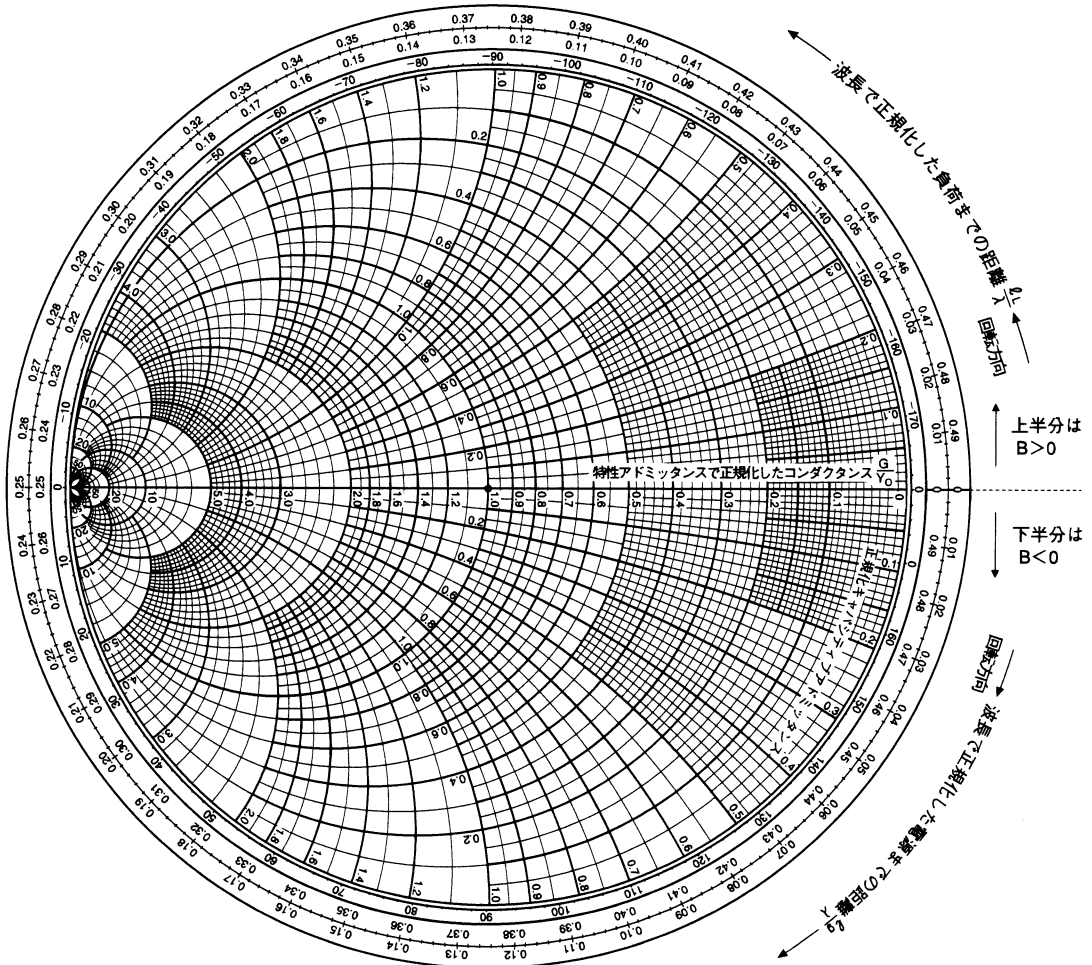


図 2.5 アドミッタンススミス図表



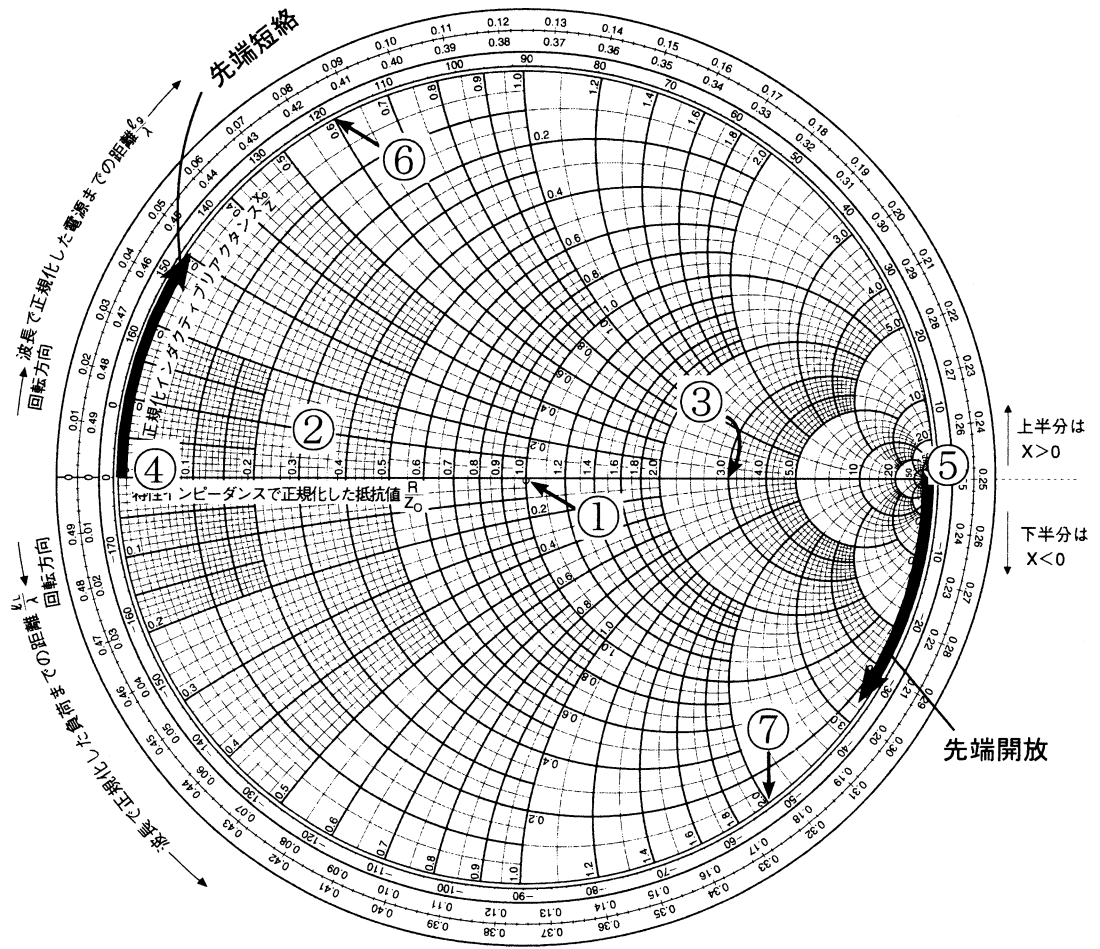


図 2.6 インピーダンススミス図表上に表 2.1 の例や先端短絡でインダクタンスを得る方法や、先端開放でキャパシタンスを得る方法を示した図

## 2.3 導波管の電圧・電流の定義

同軸線路などの TEM 線路では導線が2つあるから線路の断面と2つの線路の交点でできる2点間の電圧を  $V$  とし, 片側の線路を進行方向に流れる電流を  $I$  と決める事ができた. しかし, 導波管の場合には管壁の導体が1つであるので, 断面と導波管との交わる部分は, 1つの閉曲線になるので, その上のどの2点間の電圧を選ぶか, またどの電流を選ぶかは自由である. また誘電体線路のように導体がない場合にはどうするかという事になる. そこでこれらに通用する考え方は, 導波路を伝播する進行波の基準の電界分布の断面成分 (Tangential component)  $\mathbf{e}_t(x, y)$  及び磁界分布の断面成分  $\mathbf{h}_t(x, y)$  を決めるとき, 実際に存在する電界成分  $\mathbf{E}_t(x, y)$  及び磁界成分  $\mathbf{H}_t(x, y)$  がそれぞれ  $V$  倍及び  $I$  倍として電圧  $V$  及び電流  $I$  を決める方法が一般的に考えられる. そこでこれらをモード電圧及びモード電流と呼ぶ. この場合, 基準電界及び基準磁界の決め方で  $V$  や  $I$  の大きさが変わり, 従って無限の決め方がある. そこでモード電圧とモード電流の決め方として, 次の (イ) および (ロ) の定義が一般的に用いられる.

### 2.3.1 モード電圧及びモード電流による方法

#### (イ) 基準電磁界の断面成分の積分を1と決める方法

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_t = V\mathbf{e}_t, \quad \mathbf{H}_t = I\mathbf{h}_t, \quad \iint_S |\mathbf{e}_t|^2 dS = \iint_S |\mathbf{h}_t|^2 dS = 1 \\ \iint_S \mathbf{e}_t \times \mathbf{h}_t^* dS = 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.9-a)$$

この  $V, I$  で導波管の等価回路を表すと図 2.7 となる. なお同図で  $Z_c$  は導波管の波動インピーダンスで, (1.17-b) 式で示され次式である.

$$\left. \begin{aligned} \text{TE 波} \quad Z_c = Z_w &= \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{\omega\mu}{k_z} \\ \text{TM 波} \quad Z_c = Z_w &= \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{k_z}{\omega\epsilon} \end{aligned} \right\} \quad (2.9-b)$$

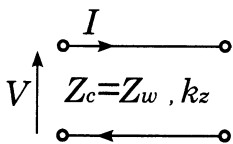


図 2.7 導波管を TEM 線路で表わした等価回路 (その1)

この方法は外部導体の断面が  $z$  軸方向に変わらない導波路で内部の媒質が  $z$  軸方向で変化する場合に便利である. これは媒質の変化する境界面で  $\mathbf{E}_t$  及び  $\mathbf{H}_t$  の連続性は  $V$  及び  $I$  の連続性に置き換わるので単なる一つの TEM 分布定数線路中の媒質変化として扱えるから便利であり, 例えば誘電体共振器の第1次近似解を求めるのに用いられる.