

やり直しのための通信数学

三谷 政昭

第8回 ウェーブレット変換による信号の多重解像度解析

今回は、ウェーブレット変換による周波数成分ごとの分析データを、多様な信号処理アプリケーションにつなげていくための基礎になる考え方を取り上げる。とくに、信号表現における“解像度”という視点から、ウェーブレット変換のもつ周波数的な取り扱いと時間的な取り扱いの相互関係をイメージ化できるよう、前回までと同様にハール・ウェーブレット変換を例に理論的な側面を中心にわかりやすく説明するので、しっかりと理解してもらいたい。

解像度(データ数)と信号近似

まず、図8.1(a)の4サンプルのデジタル信号 $s = \{2 \ 14 \ 7 \ 1\}$ は、説明の便宜上 s を $s^{(2)}$ と表すと、次の式となる。

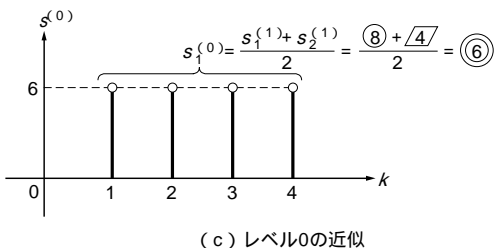
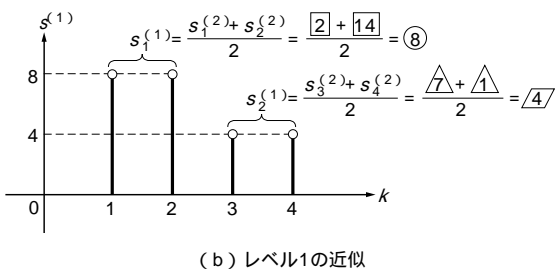
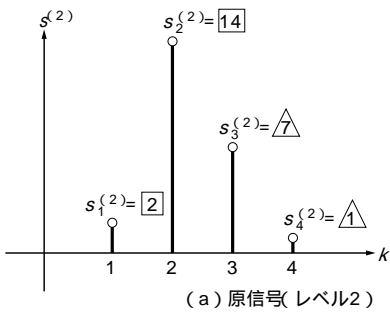


図8.1 解像度(データ数)と信号近似

$$s^{(2)} = 2\varphi_0[1 \sim 1] + 14\varphi_0[2 \sim 2] + 7\varphi_0[3 \sim 3] + 1\varphi_0[4 \sim 4] \dots\dots\dots(1)$$

ただし、 $\varphi_0[1 \sim 1] = \{1 \ 0 \ 0 \ 0\}$
 $\varphi_0[2 \sim 2] = \{0 \ 1 \ 0 \ 0\}$
 $\varphi_0[3 \sim 3] = \{0 \ 0 \ 1 \ 0\}$
 $\varphi_0[4 \sim 4] = \{0 \ 0 \ 0 \ 1\}$

次に、解像度(データ数)を半分にして近似表現してみたい。もっとも簡単な近似は、2サンプルおきに隣り合う信号の平均値を用いる方法である。すなわち、 $\{2 \ 14\}$ と $\{7 \ 1\}$ の平均値はそれぞれ、

$$\frac{2+14}{2} = 8, \quad \frac{7+1}{2} = 4 \dots\dots\dots(2)$$

となり、二つの信号値 $\{8 \ 4\}$ で近似した信号は、

$$s^{(1)} = 8\varphi_0[1 \sim 2] + 4\varphi_0[3 \sim 4] \dots\dots\dots(3)$$

ただし、

と表され、図8.1(b)のような波形となる。つまり、式(1)の $\{2\varphi_0[1 \sim 1] + 14\varphi_0[2 \sim 2]\}$ から $8\varphi_0[1 \sim 2]$ 、同様に $\{7\varphi_0[3 \sim 3] + 1\varphi_0[4 \sim 4]\}$ から $4\varphi_0[3 \sim 4]$ の粗い近似信号が得られる。

さらに続けて、式(3)の二つの信号値 $\{8 \ 4\}$ の平均値は、

$$\frac{8+4}{2} = 6 \dots\dots\dots(4)$$

となり、一つの信号 $s^{(0)} = \{6\}$ で近似した信号は、

$$s^{(0)} = 6\varphi_0[1 \sim 4] \dots\dots\dots(5)$$

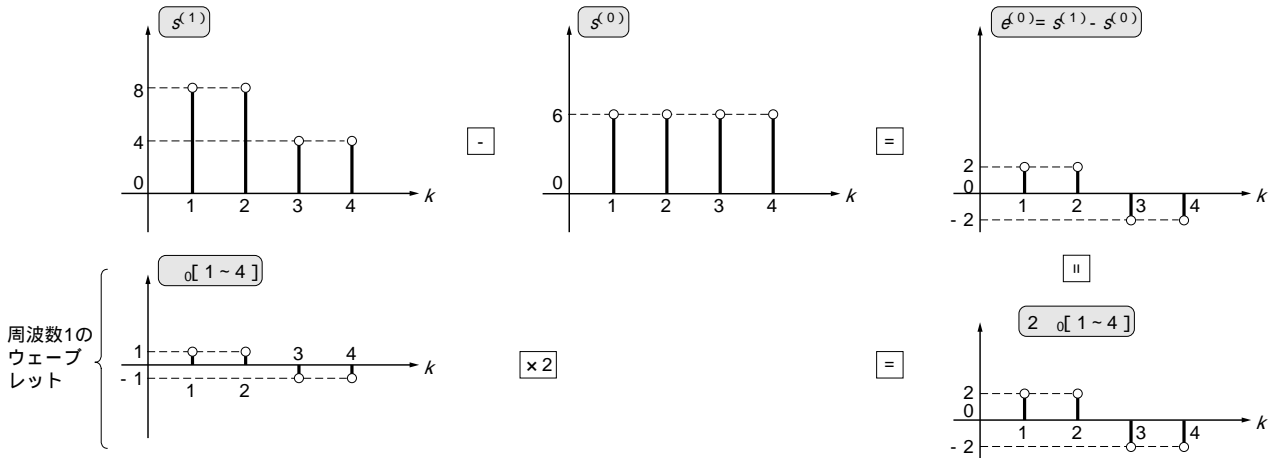
ただし、 $\varphi_0[1 \sim 4] = \{1 \ 1 \ 1 \ 1\}$

と表され、図8.1(c)のような波形となる。つまり、式(3)の $\{8\varphi_0[1 \sim 2] + 4\varphi_0[3 \sim 4]\}$ から $6\varphi_0[1 \sim 4]$ のもっとも粗い近似、すなわち直流分(平均値)だけの信号になる。

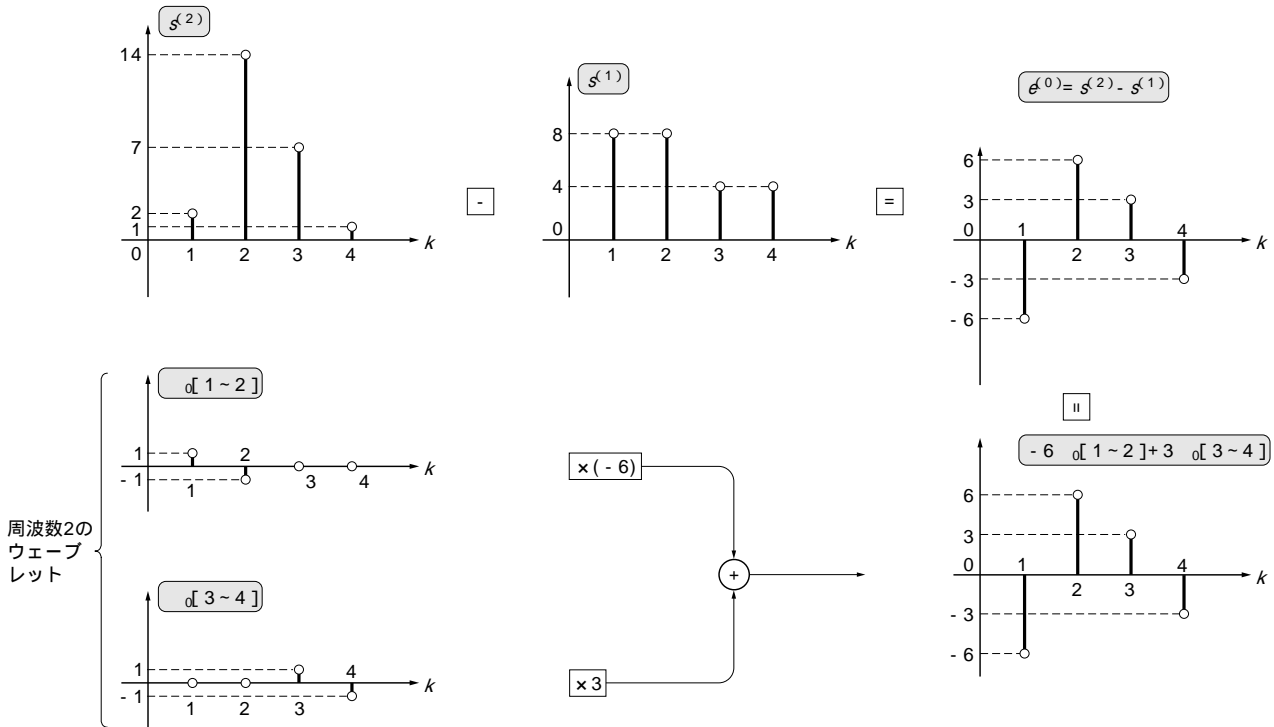
このように、

$$s^{(2)} \Rightarrow s^{(1)} \Rightarrow s^{(0)} \dots\dots\dots(6)$$

と上付き数字を2 1 0と小さくすると、粗い近似波形が得



(a) レベル0とレベル1の誤差 $e^{(0)}$



(b) レベル1とレベル2の誤差 $e^{(1)}$

図 8.2 信号近似による誤差

られる。ここで、上付き数字を「解像度レベル」と呼ぶことにし、数字を小さくすると解像度が下がって「粗い近似」に、逆に大きくすると解像度が上がって「細かな近似」になるのである。

レベルを一つ下げると解像度は半分になるわけで、次々とレベルを下げていったときの近似のようすを示したものが図 8.1 であり、レベル0のときは直流分だけになる。ここで、レベル0におけるたった1個の信号値 {6} [式(5)], あるいはレベル1の2個の信号値 {8 4} [式(3)]から、それぞれ図 8.1(b), (c)の4サンプルの信号データとして表すのが「スケーリング」と呼ば

れる処理に該当する。

また、解像度レベル(2 ~ 0)に対する表現に必要な信号値の個数は、

- レベル2 : 2 14 7 1} の4個
- レベル1 : 8 4} の2個 [式(3)]
- レベル0 : 6} の1個 [式(5)]

というように半分ずつになることがわかる。このように、解像度(表現に必要な信号値の個数)を変えて信号を解析することを「多重解像度解析(multi resolution analysis)」という。なお、