

やり直しのための通信数学

三谷 政昭

第9回 ウェーブレット変換の信号処理への応用

今回は、ウェーブレット変換を多様な信号処理アプリケーションに応用するための基礎になる考え方として、信号表現における“解像度”という視点から、ウェーブレット変換のもつ周波数的な取り扱いと時間的な取り扱いの相互関係を中心に解説した。

今回は、一次元信号(音、振動など)を対象に、ウェーブレット変換の応用事例として、エッジ(不連続な変化)の検出、雑音除去、信号抽出、データ圧縮などを取り上げる。その際、ハール・ウェーブレット変換を手計算してもらうことにより、応用事例におけるウェーブレット変換の役割や物理的な意味を把握できるようにくふうしたつもりなので、検算しながら読んでいただきたい。(筆者)

ウェーブレット変換と逆変換の手計算の流れ

それでは、ハール・ウェーブレット変換および逆変換による応用事例を体験してもらうための前準備として、簡易な計算手順の復習をしておきたい。ただし、デジタル信号のサンプル数は、2のべき乗とする。

手始めに図1のサンプル数 $N = 8 (= 2^3)$ のデジタル信号 s として、

$$s = \{4, 2, 12, 6, 8, 10, 0, 14\} \dots\dots\dots(1)$$

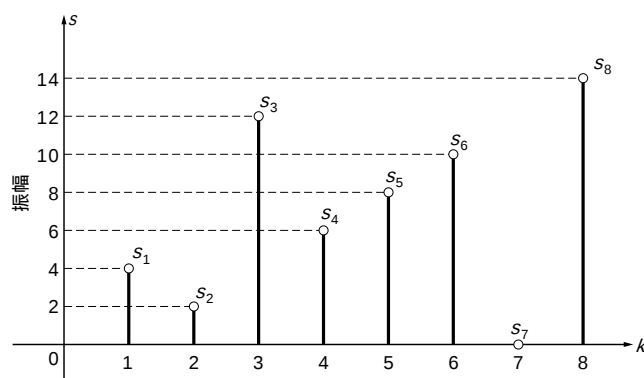


図1 デジタル信号 ($N = 2^3 = 8$ [個])

を例に、手計算によりウェーブレット変換と逆変換を求めてみよう。

● ウェーブレット変換

ステップ1

(周波数4のウェーブレット成分の算出)

隣り合う信号値の平均と平均差分を求め、前半と後半の4サンプルをそれぞれの最左端から順に並べる(図2)。式(1)のデジタル信号に対しては、

$$\left\{ \frac{4+2}{2}, \frac{12+6}{2}, \frac{8+10}{2}, \frac{0+14}{2}, \frac{4-2}{2}, \frac{12-6}{2}, \frac{8-10}{2}, \frac{0-14}{2} \right\} \\ = \{3, 9, 9, 7, 1, 3, -1, -7\} \dots\dots\dots(2)$$

となる。このとき、式(2)の後半の4サンプル、すなわち、

$$C_4 = \{1, 3, -1, -7\} \dots\dots\dots(3)$$

は、周波数4のウェーブレット成分に相当する(図3)。

ステップ2

(周波数2のウェーブレット成分の算出)

図2の前半の4サンプルに対して、ステップ1と同様に、隣り合う信号値の平均と平均差分を求め、前半と後半の2サンプルそれぞれの最左端から順に並べる(図4)。式(2)の前半の4サンプル、すなわち、

$$\{3, 9, 9, 7\} \dots\dots\dots(4)$$

に対しては、

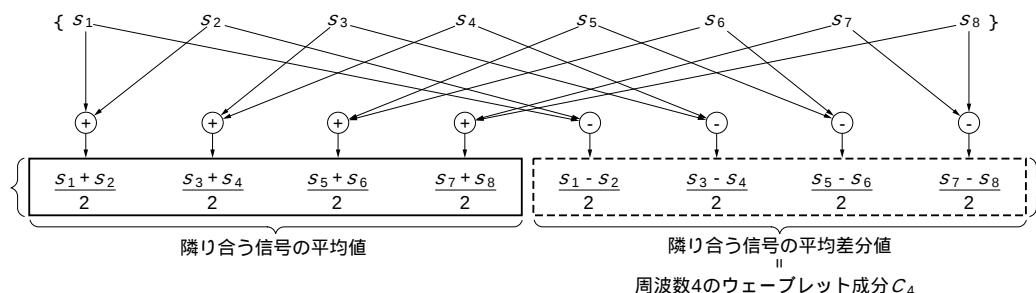


図2
ウェーブレット変換
(ステップ1)

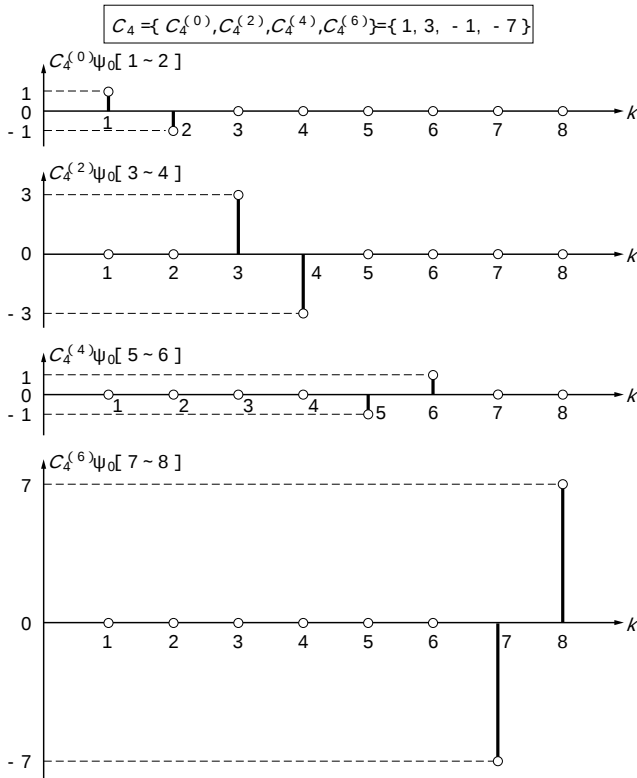


図3 周波数4のウェーブレット成分 C_4

$$\left\{ \frac{3+9}{2}, \frac{9+7}{2}, \frac{3-9}{2}, \frac{9-7}{2} \right\} = \{6, 8, -3, 1\} \dots\dots(5)$$

となる。このとき、式(5)の後半の2サンプル、すなわち、

$$C_2 = \{-3, 1\} \dots\dots(6)$$

は、周波数2のウェーブレット成分に相当する(図5)。

ステップ3

(周波数1のウェーブレット成分と直流成分の算出)

図4の前半の2サンプルに対して、ステップ1およびステップ2と同様に、隣り合う信号値の平均と平均差分を求め、左端から順に並べる(図6)。式(5)の前半の2サンプル、すなわち、

$$\{6, 8\} \dots\dots(7)$$

に対しては、

$$\left\{ \frac{6+8}{2}, \frac{6-8}{2} \right\} = \{7, -1\} \dots\dots(8)$$

となる。このとき、式(8)において、

$$C_1 = \{-1\} \dots\dots(9)$$

は周波数1のウェーブレット成分に、また、

$$C_0 = \{7\} \dots\dots(10)$$

は直流成分(8サンプルの信号の平均値に相当)を表す(図7)。

以上の計算結果(式(2)~式(10))より、図1のデジタル信号(式(1))のウェーブレット変換値は最終的に、

$$\begin{aligned} & \{C_0, C_1, C_2, C_4\} \\ &= \{C_0^{(0)}, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, C_2^{(4)}, C_4^{(0)}, C_4^{(2)}, C_4^{(4)}, C_4^{(6)}\} \\ &= \{7, -1, -3, 1, 1, 3, -1, -7\} \dots\dots(11) \end{aligned}$$

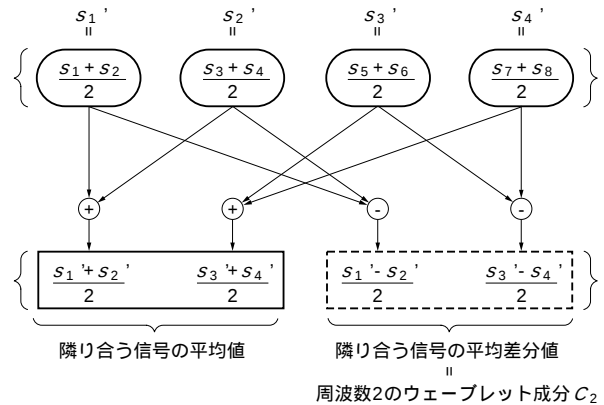


図4 ウェーブレット変換(ステップ2)

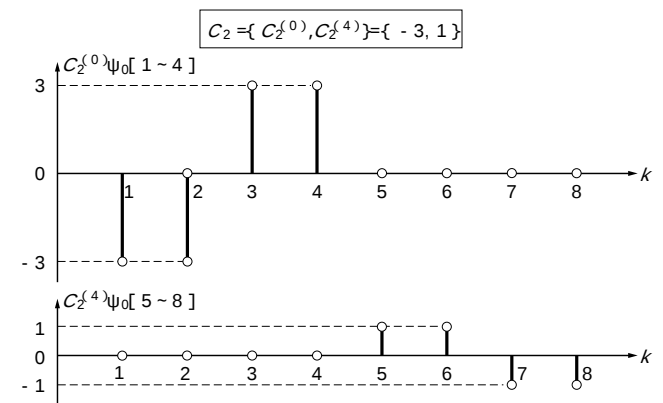


図5 周波数2のウェーブレット成分 C_2

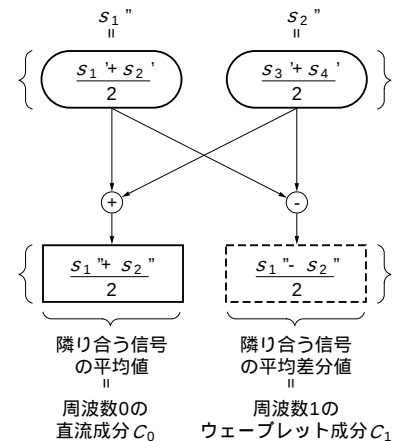


図6
ウェーブレット変換
(ステップ3)

となる。

このように、平均と平均差分を計算するステップを繰り返すことによって、順に低周波から高周波のウェーブレット成分が得られ、最終ステップでは直流成分も求められることがわかる。

● ウェーブレット逆変換

ウェーブレット逆変換は文字どおり「ウェーブレット変換の逆」であるわけで、式(1)から式(11)のウェーブレット変換値を得る計算プロセスを逆向きにたどればよい。