やり直しのための通信数学

第10回 ウェーブレット変換による画像処理の基礎

三谷 政昭

前回は，一次元信号（音声，株価など）を対象とするウェーブレット変換の応用事例（変動解析，雑音除去，エッジ検出など）を紹介した．

今回は，ウェーブレット変換の本領発揮といえる二次元信号（画像）処理の基礎を固めておきたい．まず，ウェーブレット変換による分析データを，多様な信号処理アプリケーションにつなげていくための基礎になる考え方を取り上げる．とくに，画像データの信号表現における「解像度」という視点から，ウェーブレット変換のもつ「周波数的な取り扱い」と「位置的な取り扱い」の相互関係がイメージ化できるよう，前回までと同様にハール・ウェーブレット変換を用いて，理論的な側面を中心にわかりやすく説明するので，しっかりと理解してもらいたい．（筆者）

解像度（データ数）と画像近似

いま，**図1**(**a**)に示す4×4画素の画像信号sを，

$$s=\{s_{m,n}\}_{m,n=1}^{m,n=4}$$

として，

$$s=\begin{bmatrix}18 & 8 & 2 & -6\\ 2 & 12 & 2 & -6\\ 8 & 8 & 7 & -7\\ -8 & -8 & -7 & 7\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

(a)

18	8	2	−6
2	12	2	−6
8	8	7	−7
−8	−8	−7	7

(b)

10	−2
0	0

(c)

2

(**a**) $s^{(2)}$（データ数16個） (**b**) $s^{(1)}$（データ数4個） (**c**) $s^{(0)}$（データ数1個）

図1 解像度と近似画像

	1	2	3	⋯	n	$n+1$	⋯
1	0	0	0		0	0	⋯
2	0	0	0		0	0	⋯
3	0	0	0		0	0	⋯
⋮							
m	0	0	0		1	0	⋯
$m+1$	0	0	0		0	0	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋱

図2
$\boldsymbol{\psi_0[m\sim m]\otimes\psi_0[n\sim n]}$

を考える．ここで，説明の便宜上sを$s^{(2)}$と表すと，

$$\begin{aligned}s^{(2)}&=18\varphi_0[1\sim1]\otimes\varphi_0[1\sim1]+8\varphi_0[1\sim1]\otimes\varphi_0[2\sim2]\\&\quad+2\varphi_0[1\sim1]\otimes\varphi_0[3\sim3]+(-6)\varphi_0[1\sim1]\otimes\varphi_0[4\sim4]\\&\quad+2\varphi_0[2\sim2]\otimes\varphi_0[1\sim1]+12\varphi_0[2\sim2]\otimes\varphi_0[2\sim2]\\&\quad+\ \cdots\\&=\sum_{m,n=1}^{4}s_{m,n}\varphi_0[m\sim m]\otimes\varphi_0[n\sim n]\quad\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}$$

ここで，演算子（⊗）は，

$$[a\ \ b\ \ c\ \ d]\otimes[e\ \ f\ \ g\ \ h]=\begin{bmatrix}ae & af & ag & ah\\ be & bf & bg & bh\\ ce & cf & cg & ch\\ de & df & dg & dh\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

である．たとえば，$\varphi_0[3\sim3]\otimes\varphi_0[2\sim2]$は，

$$\begin{cases}\varphi_0[3\sim3]=[0\ \ 0\ \ 1\ \ 0]\\ \varphi_0[2\sim2]=[0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]\end{cases}$$

となる関係より，式(3)を適用すれば，

$$\varphi_0[3\sim3]\otimes\varphi_0[2\sim2]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

を表し，画素$s_{3,2}$の位置を示す(**図2**)．

次に，解像度（データ数）を縦と横を半分にして近似表現してみたい．もっとも簡単な近似は，2×2画素を1ブロックとして，ブロックごとの平均値を用いる方法である．すなわち，

$$\begin{bmatrix}18 & 8\\ 2 & 12\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}2 & -6\\ 2 & -6\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}8 & 8\\ -8 & -8\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}7 & -7\\ -7 & 7\end{bmatrix}$$

の各ブロックの平均値はそれぞれ，

KEYWORD ── ウェーブレット変換，二次元信号処理，画像処理，ハール・ウェーブレット変換，多重解析度解析，画像近似，解像度レベル，スケーリング

$$\begin{cases} \dfrac{18+8+2+12}{4}=10, & \dfrac{2+(-6)+2+(-6)}{4}=-2 \\ \dfrac{8+8+(-8)+(-8)}{4}=0, & \dfrac{7+(-7)+(-7)+7}{4}=0 \end{cases}$$

となり，

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(4)$$

と表される．得られた四つの信号値で近似した信号は，

$$s^{(0)}=\begin{bmatrix} 10 & 10 & -2 & -2 \\ 10 & 10 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(5)$$

$$=10\varphi_0[1\sim2]\otimes\varphi_0[1\sim2]+(-2)\varphi_0[1\sim2]\otimes\varphi_0[3\sim4]$$
$$+0\varphi_0[3\sim4]\otimes\varphi_0[1\sim2]+0\varphi_0[3\sim4]\otimes\varphi_0[3\sim4] \quad\cdots(6)$$

であり，**図1**(**b**)のような近似画像が得られる．式(6)において，たとえば $\varphi_0[1\sim2]\otimes\varphi_0[3\sim4]$ は，

$$\begin{cases} \varphi_0[1\sim2]=[1\ 1\ 0\ 0] \\ \varphi_0[3\sim4]=[0\ 0\ 1\ 1] \end{cases}$$

の関係より，

$$\varphi_0[1\sim2]\otimes\varphi_0[3\sim4]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(7)$$

で，右上隅の2×2画素のブロック位置に相当する．つまり，**図1**(**a**)の各ブロックがそれぞれ，

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 18 & 8 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ -8 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ -7 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad\cdots\cdots(8)$$

となり，粗い近似信号 $s^{(1)}$ が得られる．

さらに続けて，2×2個の信号値，

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の平均値は，

$$\frac{10+(-2)+0+0}{4}=2$$

となり，一つの信号［2］で近似した信号は，

$$s^{(0)}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(9)$$

$$=2\varphi_0[1\sim4]\otimes\varphi_0[1\sim4] \quad\cdots\cdots(10)$$

と表され，**図1**(**c**)のような画像信号となる．ここで，

$$\varphi_0[1\sim4]=[1\ 1\ 1\ 1]$$

の関係より，

$$\varphi_0[1\sim4]\otimes\varphi_0[1\sim4]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(11)$$

で，式(9)のもっとも粗い近似，すなわち直流分(平均値)だけの信号が得られる．

このように，

$$s^{(2)}\Rightarrow s^{(1)}\Rightarrow s^{(0)} \quad\cdots\cdots(12)$$

と上付きの数字を2→1→0と小さくすると粗い近似画像が得られる．ここで，上付きの数字を“解像度レベル”と呼ぶことにする．解像度レベルの数字を小さくすると解像度が下がって“粗い近似”に，逆に大きくすると解像度が上がって“細かな近似”になる．

レベルを一つ下げると解像度は半分になるわけで，次々とレベルを下げていったときの近似のようすを示したものが**図1**であり，レベル0のときは，直流分だけになる．ここで，レベル0におけるたった1個の信号値［2］，あるいはレベル1の4(＝2×2)個の信号値，

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(4)\text{の再掲}$$

から，それぞれ**図1**(**b**)，(**c**)の4×4画素の信号データとして表すのが“スケーリング”と呼ばれる処理に該当する．

また，解像度レベルに対する表現に必要な信号値の個数は，

$$\begin{cases} \text{レベル2}: \begin{bmatrix} 18 & 8 & 2 & -6 \\ 2 & 12 & 2 & -6 \\ 8 & 8 & 7 & -7 \\ -8 & -8 & -7 & 7 \end{bmatrix} \text{の16個} \\ \text{レベル1}: \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{の4個} \\ \text{レベル0}: [\ 2\ ] \text{の1個} \end{cases}$$

というように1/4ずつになることがわかる．このように，解像度(表現に必要な信号値の個数)を変えて信号を解析することを“多重解像度解析”という．

なお，多重解像度解析を用いれば，4×4画素(レベル2)の原画像を1個の信号値(レベル0)で近似して表せるわけで，この近似表現が画像データ圧縮に大いに貢献し得るアイデアを提供することになるのである．

ウェーブレット変換と近似画像の誤差

次に，**図1**(**a**)の4×4画素の画像信号を例に，レベル0とレベル1の近似画像の誤差 $e^{(0)}$ として，

$$e^{(0)}=s^{(1)}-s^{(0)} \quad\cdots\cdots(13)$$