やり直しのための通信数学

第11回 画像処理における2次元ウェーブレット変換値の諸性質

三谷 政昭

前回は，２次元信号（画像）に対するウェーブレット変換値のもつ物理的な意味として，“解像度”という視点から見た「周波数的な取り扱い」と「位置的な取り扱い」の相互関係にフォーカスし，数式表現を用いて説明した．

今回は，２次元ウェーブレット変換および逆変換の計算の流れを復習したあと，多様な画像に対するウェーブレット変換値から得られる二つのパラメータ（「周波数」，「位置」）を“どのようにして画像処理応用に結び付けていくのか”について，基本的な考え方と２次元ウェーブレット変換値の諸性質を中心に解説する．（筆者）

2次元ウェーブレット変換の手計算の流れ

2次元ハール・ウェーブレット変換および逆変換による画像処理を体験してもらうための前準備として，計算手順の復習をしておきたい（これ以降，ウェーブレット変換をWT：Wavelet Transform，逆変換をIWT：Inverse Wavelet Transformと略記）．ただし，ディジタル信号のサンプル数は，2のべき乗とする．なお，手計算によるWT，IWT処理は画像データ処理を感覚的につかむことができるので，各自で検算しながら読み進めてもらいたい．

● 2次元WT値の計算手順

具体例として$N = 4 (= 2^2)$とし，1次元WTを縦（列）と横（行）の方向に適用すれば，4×4画素の2次元WT計算が行えることを示そう．1次元WT値については，本連載の第9回「ウェーブレット変換の信号処理への応用」（2006年5月号）に詳述してあるので，参考にしてもらいたい．いま，$N = 4$の1次元信号を，

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (1)$$

とするとき，1次元WT値は2ステップで求められる．

● ステップ1

隣り合う信号値の平均と平均差分を求め，前半と後半の2サンプルをそれぞれ最左端から順に並べる（**図1**）．式(1)の1次元信号に対しては，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{a+b}{2} & \dfrac{c+d}{2} & \dfrac{a-b}{2} & \dfrac{c-d}{2} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (2)$$

となる．このとき，式(2)の後半の2サンプル，すなわち，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{a-b}{2} & \dfrac{c-d}{2} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (3)$$

は，周波数2のウェーブレット成分に相当する．

● ステップ2

図1（あるいは式(2)）の前半の2サンプル，すなわち，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{a+b}{2} & \dfrac{c+d}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \end{bmatrix}$$
$$\text{ただし，} \quad e = \frac{a+b}{2}, \; f = \frac{c+d}{2} \quad \cdots\cdots (4)$$

に対して，**ステップ1**と同様に，隣り合う信号値の平均と平均差分を求め，順に並べる（**図2**）．

$$\begin{bmatrix} \dfrac{e+f}{2} & \dfrac{e-f}{2} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (5)$$

このとき，式(5)の後半の1サンプル，すなわち，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{e-f}{2} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (6)$$

は，周波数1のウェーブレット成分に相当する．

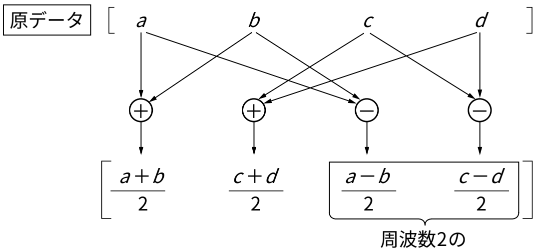

図1　1次元WT（ステップ1，データ数4個の場合）

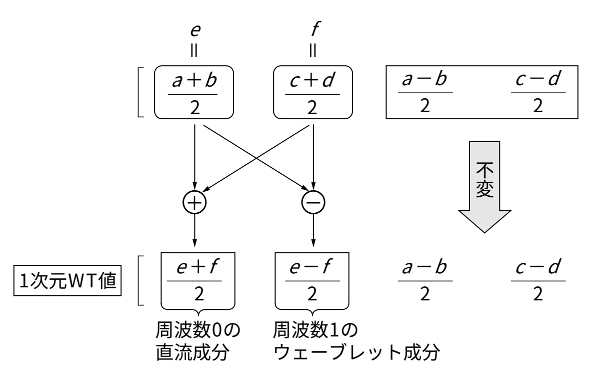

図2　1次元WT（ステップ2，データ数4個の場合）

KEYWORD ——2次元ウェーブレット変換，2次元ウェーブレット逆変換，周波数，位置，画像処理用マスク，近似画像

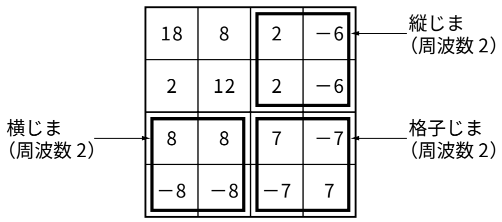

図3　4×4画素の画像信号 *s* の例

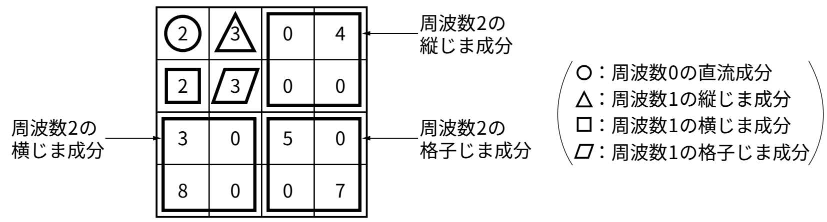

図4　図3の画像の2次元WT値 *C*

● 画像処理用マスクで算出した2次元WT値

いま，**図3**に示す4×4画素の画像信号 s，すなわち，

$$s=\begin{bmatrix}18 & 8 & 2 & -6\\ 2 & 12 & 2 & -6\\ 8 & 8 & 7 & -7\\ -8 & -8 & -7 & 7\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

に対する2次元WT値 C を，画像処理用マスクを利用して計算すると，

$$C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 5 & 0\\ 8 & 0 & 0 & 7\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

と表される(**図4**)．なお，画像処理用マスク(平均値，縦じま，横じま，格子じま用の4種類)による計算プロセスについては，本連載の第10回「ウェーブレットによる画像処理の基礎」(本誌2006年6月号)を参照してほしい．

● 行から列の順で算出した2次元WT値

いよいよ，**図3**〔式(7)〕の画像に対して，行から列の順に1次元WT計算を適用してみよう(**図5**)．

● ステップ1

4×4画素を行ごとに分けて，式(2)を適用する．1行目は，

$$[18 \quad 8 \quad 2 \quad -6]$$

$$\Rightarrow\left[\frac{18+8}{2} \quad \frac{2+(-6)}{2} \quad \frac{18-8}{2} \quad \frac{2-(-6)}{2}\right]$$

$$=[13 \quad -2 \quad 5 \quad 4]$$

となり，ほかも同じように計算すれば，

$$\begin{aligned}
[2 \quad 12 \quad 2 \quad -6] &\Rightarrow [7 \quad -2 \quad -5 \quad 4]\\
[8 \quad 8 \quad 7 \quad -7] &\Rightarrow [8 \quad 0 \quad 0 \quad 7]\\
[-8 \quad -8 \quad -7 \quad 7] &\Rightarrow [-8 \quad 0 \quad 0 \quad -7]
\end{aligned}$$

となり，上から下へと順に並べて，

$$\begin{bmatrix}13 & -2 & 5 & 4\\ 7 & -2 & -5 & 4\\ 8 & 0 & 0 & 7\\ -8 & 0 & 0 & -7\end{bmatrix}$$

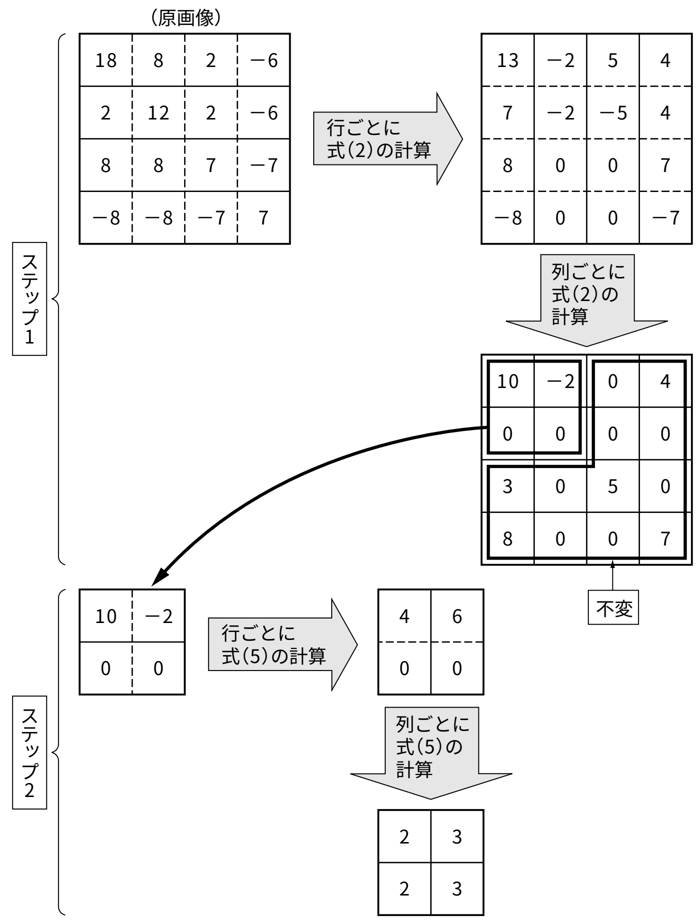

図5　1次元WT値による2次元WT値の算出(4×4画素の例)

と表される．

さらに，列ごとに分けて式(2)を適用する．1列目は，

$$\begin{bmatrix}13\\ 7\\ 8\\ -8\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\dfrac{13+7}{2}\\ \dfrac{8+(-8)}{2}\\ \dfrac{13-7}{2}\\ \dfrac{8-(-8)}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 0\\ 3\\ 8\end{bmatrix}$$

となり，ほかも同様の計算により，