やり直しのための通信数学

第12回 ウェーブレット変換による画像処理応用――その1

三谷 政昭

前回は，2次元信号（画像）に対するウェーブレット変換値から得られる二つのパラメータ（周波数，位置）を読み取り，画像処理の応用に結び付けていくための諸性質を中心に解説した．

今回は，2次元ウェーブレット変換による画像処理の代表的な応用事例として，画像データの圧縮，雑音除去，電子透かし（著作権保護）を取り上げて，具体的数値例を示しながら，わかりやすく説明する．いずれの事例も，各自が手計算して検算することにより，2次元ウェーブレット変換を画像処理に応用するための基本的な考え方をしっかりと理解してもらいたい．（筆者）

画像データの圧縮――可逆圧縮と非可逆圧縮

データ圧縮には，文書データやソフトウェアの圧縮に適用される可逆圧縮と，画像や音声データなどに適用される非可逆圧縮とがある（**表1**）．

一般に，非可逆圧縮のほうが高い圧縮率が期待できるが，その主たる理由は，「可逆圧縮では，原データと復元後のデータが完全に一致しなければならないのに対して，非可逆圧縮では，復元後のデータに情報の多少の欠落を許容しているため，圧縮効率を高めるための自由度が高い」ことによる（**図1**）．

たとえば，医用診断画像や高精細画像などにおいては，画質劣化のまったくないデータ圧縮，すなわち“可逆圧縮”が必要とされる．これに対して，静止画像圧縮のJPEGや動画像圧縮のMPEGなどでは，画質をある程度犠牲にする代わりにデータ量を大幅に削減して通信時間ないしメモリ量を節約するために，DCT（Discrete Cosine Transform；離散コサイン変換）やウェーブレット変換などの直交変換が広く利用されている．このように，「少々の劣化があっても，実用上さしつかえなければよい」とする考え方に基づくものは“非可逆圧縮”と呼ばれる．

ところで，身の周りにある自然な画像データはあまり変化しないもの（直流近傍の低い周波数成分に相当）が多く，高い周波数成分（細かいしま模様に相当）が少ないという特徴がある．そこで，画像を2次元ウェーブレット変換して得られる計算値のうち，大きいものだけを選び出して小さいものは強制的にゼロ（0）にし，利用する変換値の総個数を削減することによって，データ圧縮を実現できるというコンセプトに基づく応用事例を取り上げる．

それでは，**図2**に示す$2^K \times 2^K$画素（Kは正整数）の画像を考え，2次元ウェーブレット変換（WT），逆変換（IWT）を用いたデータ圧縮，復元（再合成）の手順を説明する．

● 手順1：ウェーブレット変換値の計算

2次元ウェーブレット変換値を計算する[注1]．2次元WT値は，全部で$2^K \times 2^K$個であり，**図3**に示すように周波数，およびブロック位置を読み取ることができる．ここで，**図3**の各要素は，

$D_{1,1}^{(0)}$：周波数0（直流分）で画像全体の画素の平均値
$V_{m,n}^{(\ell)}$：周波数ℓでブロック位置$(m,\ n)$の縦じま
$H_{m,n}^{(\ell)}$：周波数ℓでブロック位置$(m,\ n)$の横じま
$L_{m,n}^{(\ell)}$：周波数ℓでブロック位置$(m,\ n)$の格子じま

を表す．

表1　画像データの圧縮――可逆圧縮と非可逆圧縮

方式	説明
可逆圧縮	テキスト，2値画像，静止画像，医療用診断画像，高精細画像，プログラムやオブジェクト・コードなどのバイナリ・データ，高品質オーディオ
非可逆圧縮	静止画像（JPEGなど），動画像（MPEGなど），音声や楽曲（MP3など）

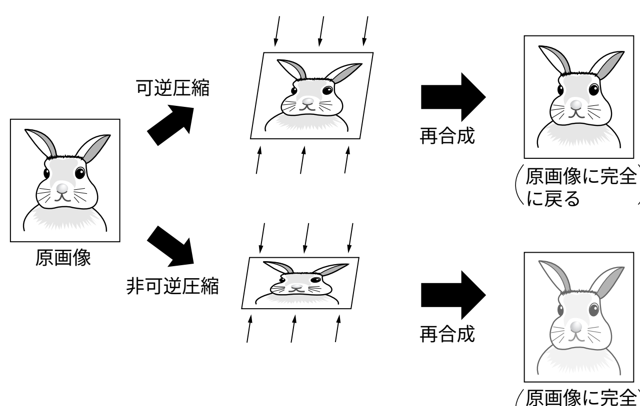

図1　可逆圧縮と非可逆圧縮の概念図

注1：詳細は，本連載の第11回「画像処理における2次元ウェーブレット変換値の諸性質」（本誌2006年7月号に掲載）を参照．

KEYWORD――画像処理，画像圧縮，ウェーブレット変換，逆ウェーブレット変換，可逆圧縮，非可逆圧縮，画像雑音，電子透かし，不可視情報，著作権保護

● **手順 2 ：変換値の選択処理（データ圧縮）**

$2^K \times 2^K$ 個の変換値を絶対値の大きい順に並べ，絶対値が大きい順に上位のいくつかを残し，そのほかの変換値を0にする．この選択処理が，画像データの圧縮につながるのである．その結果，強制的に0にした変換値がもつ画像情報は失われることになるので，再合成した画像は劣化する．このとき，見た目を損なわないようにデータ量を減らすための“さじ加減”が重要で，データ圧縮の善し悪しを決定する鍵を握っている．

● **手順 3 ：信号の再合成**

手順2で選択処理した変換値（0でない）をもとに，2次元ウェーブレット逆変換して，信号を再合成する．

画像圧縮の計算例

それでは，一例を示してみよう．

● **手順 1 ：ウェーブレット変換値の計算**

いま，**図4**に示す4×4画素の画像信号，

$$s = \left\{ s_{m,n} \right\}_{m,n=1}^{m,n=4}$$

$N=2^K$〔個〕

m \ n	1	2	3	⋯	2^K
1	$s_{1,1}$	$s_{1,2}$	$s_{1,3}$	⋯	$s_{1,N}$
2	$s_{2,1}$	$s_{2,2}$	$s_{2,3}$	⋯	$s_{2,N}$
3	$s_{3,1}$	$s_{3,2}$	$s_{3,3}$	⋯	$s_{3,N}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
2^K	$s_{N,1}$	$s_{N,2}$	$s_{N,3}$	⋯	$s_{N,N}$

$N=2^K$〔個〕

図2　$2^K \times 2^K$ 画素の画像 $s=\left\{s_{m,n}\right\}_{m,n=1}^{m,n=N}$

$N=2^K$〔個〕

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	⋯	2^K
1	$D_{1,1}^{(0)}$	$V_{1,1}^{(1)}$	$V_{1,1}^{(2)}$	$V_{1,2}^{(2)}$	$V_{1,1}^{(4)}$	$V_{1,2}^{(4)}$	$V_{1,3}^{(4)}$	$V_{1,4}^{(4)}$	$V_{1,1}^{(8)}$	$V_{1,2}^{(8)}$	⋯	$V_{1,\frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})}$
2	$H_{1,1}^{(1)}$	$L_{1,1}^{(1)}$	$V_{2,1}^{(2)}$	$V_{2,2}^{(2)}$	$V_{2,1}^{(4)}$	$V_{2,2}^{(4)}$	$V_{2,3}^{(4)}$	$V_{2,4}^{(4)}$	$V_{2,1}^{(8)}$	$V_{2,2}^{(8)}$	⋯	$V_{2,\frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})}$
3	$H_{1,1}^{(2)}$	$H_{1,2}^{(2)}$	$L_{1,1}^{(2)}$	$L_{1,2}^{(2)}$	$V_{3,1}^{(4)}$	$V_{3,2}^{(4)}$	$V_{3,3}^{(4)}$	$V_{3,4}^{(4)}$	$V_{3,1}^{(8)}$	$V_{3,2}^{(8)}$	⋯	$V_{3,\frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})}$
4	$H_{2,1}^{(2)}$	$H_{2,2}^{(2)}$	$L_{2,1}^{(2)}$	$L_{2,2}^{(2)}$	$V_{4,1}^{(4)}$	$V_{4,2}^{(4)}$	$V_{4,3}^{(4)}$	$V_{4,4}^{(4)}$	$V_{4,1}^{(8)}$	$V_{4,2}^{(8)}$	⋯	$V_{4,\frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})}$
5	$H_{1,1}^{(4)}$	$H_{1,2}^{(4)}$	$H_{1,3}^{(4)}$	$H_{1,4}^{(4)}$	$L_{1,1}^{(4)}$	$L_{1,2}^{(4)}$	$L_{1,3}^{(4)}$	$L_{1,4}^{(4)}$	$V_{5,1}^{(8)}$	$V_{5,2}^{(8)}$	⋯	$V_{5,\frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})}$
6	$H_{2,1}^{(4)}$	$H_{2,2}^{(4)}$	$H_{2,3}^{(4)}$	$H_{2,4}^{(4)}$	$L_{2,1}^{(4)}$	$L_{2,2}^{(4)}$	$L_{2,3}^{(4)}$	$L_{2,4}^{(4)}$	$V_{6,1}^{(8)}$	$V_{6,2}^{(8)}$	⋯	$V_{6,\frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})}$
7	$H_{3,1}^{(4)}$	$H_{3,2}^{(4)}$	$H_{3,3}^{(4)}$	$H_{3,4}^{(4)}$	$L_{3,1}^{(4)}$	$L_{3,2}^{(4)}$	$L_{3,3}^{(4)}$	$L_{3,4}^{(4)}$	$V_{7,1}^{(8)}$	$V_{7,2}^{(8)}$	⋯	$V_{7,\frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})}$
8	$H_{4,1}^{(4)}$	$H_{4,2}^{(4)}$	$H_{4,3}^{(4)}$	$H_{4,4}^{(4)}$	$L_{4,1}^{(4)}$	$L_{4,2}^{(4)}$	$L_{4,3}^{(4)}$	$L_{4,4}^{(4)}$	$V_{8,1}^{(8)}$	$V_{8,2}^{(8)}$	⋯	$V_{8,\frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})}$
9	$H_{1,1}^{(8)}$	$H_{1,2}^{(8)}$	$H_{1,3}^{(8)}$	$H_{1,4}^{(8)}$	$H_{1,5}^{(8)}$	$H_{1,6}^{(8)}$	$H_{1,7}^{(8)}$	$H_{1,8}^{(8)}$	$L_{1,1}^{(8)}$	$L_{1,2}^{(8)}$	⋯	$V_{9,\frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})}$
10	$H_{2,1}^{(8)}$	$H_{2,2}^{(8)}$	$H_{2,3}^{(8)}$	$H_{2,4}^{(8)}$	$H_{2,5}^{(8)}$	$H_{2,6}^{(8)}$	$H_{2,7}^{(8)}$	$H_{2,8}^{(8)}$	$L_{2,1}^{(8)}$	$L_{2,2}^{(8)}$	⋯	$V_{10,\frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
2^K	$H_{\frac{N}{2},1}^{(\frac{N}{2})}$	$H_{\frac{N}{2},2}^{(\frac{N}{2})}$	$H_{\frac{N}{2},3}^{(\frac{N}{2})}$	$H_{\frac{N}{2},4}^{(\frac{N}{2})}$	$H_{\frac{N}{2},5}^{(\frac{N}{2})}$	$H_{\frac{N}{2},6}^{(\frac{N}{2})}$	$H_{\frac{N}{2},7}^{(\frac{N}{2})}$	$H_{\frac{N}{2},8}^{(\frac{N}{2})}$	$H_{\frac{N}{2},9}^{(\frac{N}{2})}$	$H_{\frac{N}{2},10}^{(\frac{N}{2})}$	⋯	$L_{\frac{N}{2},\frac{N}{2}}^{(\frac{N}{2})}$

$N=2^K$〔個〕

図3
2次元ウェーブレット変換値
（$2^K \times 2^K$ 個）