第3章

数学的な表現方法を使って物理的な意味を理解しよう

アナログ・フィルタの特性解析に便利なツール

ここでは，アナログ・フィルタの特性を解析する際に，ぜひとも知っておいてもらいたい数学的な表現方法について，Scilabを動かしながら解説する．とくに，アナログ・フィルタの伝達関数や周波数特性の数式表現の背後にある物理的意味をわかりやすいことばで説明してあるので，しっかりと自分のものにし，活用できるようにしてほしい．同時に，アナログ信号処理の本質に関わる重要な内容が多数含まれているので，じっくりと読み進めていってもらいたい．なお，前章までと同様に，フィルタ解析ツール用プログラム・ファイルFspLib.sceはかならず実行することを忘れないこと（ほかの章でも必要な処理である）．（筆者）

1 特性解析の基本は複素数のフェーザ表示（極座標）

一般的なフィルタは，入力と出力を1個ずつ有し，入出力関係を表す特性パラメータとして伝達関数，周波数スペクトル，ゲイン（振幅）特性，位相（フェーズ）特性，極と零点，インパルス応答がよく登場します．そこで，各特性パラメータの物理的な意味や相互関係にフォーカスして，フィルタを論じていくのに必要となる数式による表現を紹介しておきましょう．

交流信号に対するフィルタのふるまいは，振幅，位相，周波数といった多次元（複数）のパラメータ相互の関連を考慮しなければなりません．このようなパラメータを取り扱うために，通常は2次元量（2次元ベクトル，複素数）で考えます（**図1**）．

2次元量の複素数は，虚数単位$j(=\sqrt{-1})$を用いて，

$$w = a + jb \quad \cdots\cdots (1)$$

；aは実部（実数部），bは虚部（虚数部）

と複素表示され，直交座標による表現と呼ばれます．

まずは，Scilabでの複素数の取り扱い方を例題で示しながら身につけてもらうことにします．

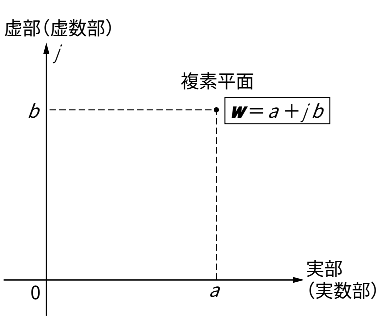


図1　2次元量の表現（複素表示，直交座標）

例題1

次の複素数を入力し，計算結果を示しなさい．

① $j6$　② $3+j4$　③ $2-j$

④ $(3+j4)\times(2-j)$　⑤ $\dfrac{3+j4}{2-j}$

解答1

Scilabでは虚数単位$j=\sqrt{-1}$を，`%i`と記述します（p.42参照）．

実行例1

```
-->a = %i*6                    ……………… ①
 a  =
    6.i
-->b = 3 + %i*4                ……………… ②
 b  =
    3. + 4.i
-->c = 2 -%i                   ……………… ③
 c  =
    2. - i
-->b*c                         ……………… ④
 ans  =
    10. + 5.i
-->b/c                         ……………… ⑤
 ans  =
    0.4 + 2.2i
```

例題2

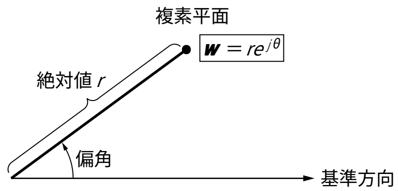
次の複素数の実部と虚部の値を求めなさい．

$$\frac{5-j10}{1+j2}(=-3-j4) \quad \cdots\cdots (1)$$

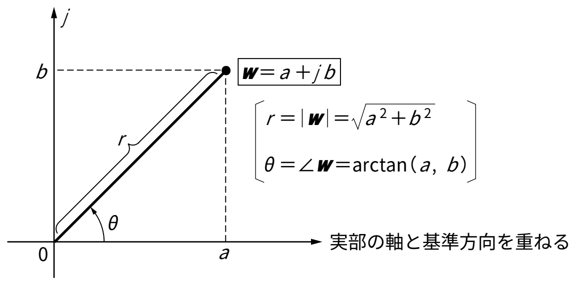
解答2

複素数の実部は`real`命令，虚部は`imag`命令を用います．なお，実部はreal part，虚部はimaginary partといいます．

KEYWORD ── 複素数，極座標，real，imag，フェーザ表示，利得特性，位相特性，ラプラス変換，ラプラス逆変換，ラプラス変換対，伝達関数，インパルス応答，ステップ応答，正弦波応答，方形波応答



(a) フェーズ表示（極座標）



(b) 複素表示（直交座標）からフェーザ表示への変換

図2 2次元量の表現（フェーザ表示，極座標）

実行例2

```
-->d =(5-%i*10)/(1+%i*2); ↵
-->real(d) ↵
 ans  =
    - 3.
-->imag(d) ↵
 ans  =
    - 4.
```

ところが，複素表示（直交座標）ではフィルタ特性を直接読み取ることができません．そのために，

$w = re^{\theta}$ ； r は絶対値，θ は偏角 ……(2)

という表現方法があり，フェーザ表示（極座標）と呼ばれています〔**図2（a）**〕．このとき，絶対値 r がフィルタの利得，偏角 θ が位相に相当し，物理的な意味を表すことになります．

図2（b）において，絶対値 $r(=|w|)$ は原点からの距離，および偏角 $\theta(=\angle w)$ は正の実軸（実数軸）となす角度として，

$r = \sqrt{a^2+b^2} = |w|$ ……(3)

$\theta = \mathrm{arctan}(a, b) = \angle w$ ……(4)

と表されます．ここで，偏角 θ は $-\pi$［rad］（＝－180°）から $+\pi$［rad］（＝＋180°）までの値をとるが，arctan（a，b）について類似する $\tan^{-1}(x)$ との違いをとくに強く意識して説明しておきます[注]．

まず，逆正接関数 arctan（x）は $\tan^{-1}(x)$ とも記述しますが，その名のとうり正接関数 tan の逆関数です．$\theta = \tan^{-1}(x)$ が表す θ は，

$\tan\theta = x$ ……(5)

を満たすような角度であり，

$$-\frac{\pi}{2}[\mathrm{rad}](=-90°) から +\frac{\pi}{2}(=+90°)$$

までの値をとります（**実行例3**，**図3**）．

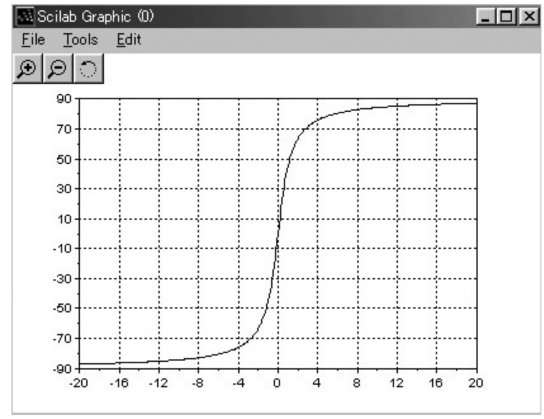


図3 $\tan^{-1}(x)$ の変化のようす

実行例3

```
-->  x=-20:0.1:20 ; ↵              ……… ①
-->  y=atan(x)  ; ↵                ……… ②
-->  xbasc(); ↵                    ……… ③
-->  plot2d(x,y/%pi*180)   ; ↵     ……… ④
-->  xgrid()   ; ↵                 ……… ⑤
```

［実行例3の説明］

① 変数の範囲
② 逆正接関数 $\tan^{-1}(x)$ の計算（atan 命令）
③ グラフ画面の消去
④ 角度単位のラジアンから度数に変換してグラフ表示
⑤ グリッド線（方眼紙のます目）表示

このように，$\tan^{-1}(x)$ は複素平面上の，

$$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}(x) < +\frac{\pi}{2} (-\infty < x < \infty)$$

の範囲（第1象限と第4象限の右半平面）しか動かないのに対して，一般の偏角 θ は第1象限から第4象限まで動きます．逆にいえば，複素平面上の点 w（＝ a ＋ jb）がどの象限にあるのかを考慮した上で偏角 θ を算出しなければならないわけです．Scilab では，式(4)の偏角 arctan（a，b）を計算するために関数コマンド arctan を用いることができます（**実行例4**）．このとき，得られる偏角の単位はラジアン［rad］表示で，度数に変換するには，

注：数学に詳しい人向けの注……本特集では，逆正接の主値 $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$ を $\tan^{-1}$，一般の逆正接で値を $-\pi < \theta < +\theta$ に選んだものを arctan と書き分けている．標準的な教科書ではこういう使い分けはせず，単に $\tan^{-1}$ を arctan と書くことが多いようである．
また，一般的に数学では2変数の arctan（a，b）は用いられず，$\tan^{-1}(x)$ という1変数記法一本槍だ．しかし，筆者は2変数の arctan（a，b）のほうが直感的で便利だと思うが，数学の試験答案にだけは書かないほうが無難といえる．