第5章

伝達関数と周波数特性の関係をローパス・フィルタから理解しよう

アナログ・フィルタの伝達関数設計

ここでは，伝達関数と周波数特性の相互関係を理解してもらうことから説明を始める．その際，フィルタ設計のプロトタイプ(基準フィルタ)としてローパス・フィルタにフォーカスして解説し，適当な変数変換を行えばハイパス，バンドパスなども容易に得られることを示す．さらに，設計仕様を満たすフィルタの伝達関数を見い出すまでの設計の流れを紹介し，Scilabの力を借りてアナログ・フィルタの設計プロセスを体験してもらう．　(筆者)

1 バタワース形フィルタの設計

アナログ・フィルタには，前述のようにLPF，HPF，BPF，BEFがありますが，基準ローパス・フィルタ(遮断周波数ω_c［rad/秒］)から周波数変換によって容易に得ることができます．そこで，設計の基本として，ローパス・フィルタを取り上げて説明することにします．

さて，アナログ・フィルタの理想的ローパス特性は，**図1**に示すように，

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} 1 & (0 \leqq \omega \leqq \omega_c) \\ 0 & (\omega_c \leqq \omega) \end{cases} \quad \cdots\cdots(1)$$

で与えられます．

このような理想的ローパス特性を近似するN次のバタワース特性は，

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}} \quad \cdots\cdots(2)$$

ただし，Nはフィルタの次数，ω_cは遮断周波数によって与えられます．ここで，上式をテーラー級数(マクロリーン級数)に展開すると，

$$|G(j\omega)| = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N} + \frac{3}{8}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{4N} - \frac{5}{16}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{6N} + \cdots \quad \cdots(3)$$

となり，直流点($\omega = 0$)における導関数は次のように計算されます．

$$\left.\frac{d^k|G(j\omega)|}{d\omega^k}\right|_{\omega=0} = 0 \quad ;k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 2N-1$$

$$\left.\frac{d^{2N}|G(j\omega)|}{d\omega^{2N}}\right|_{\omega=0} = -\frac{1}{2}(2N)\times(2N-1)\times\cdots\times 2\times 1 \neq 0$$

このように$(2N-1)$次までの導関数がすべて0(零)に等しいことから最大平坦特性として知られ，式(2)の次数Nを大きくするほど理想的なローパス特性に近づくことがわかります(**実行例1**，**図2**では遮断周波数$\omega_c = 2\pi \times 300$［rad/秒］で300［Hz］に相当)．

実行例1

```
-->butt(1,300,0:2000);    ………次数N＝1
-->butt(2,300,0:2000);    ………次数N＝2
-->butt(3,300,0:2000);    ………次数N＝3
-->butt(4,300,0:2000);    ………次数N＝4
```

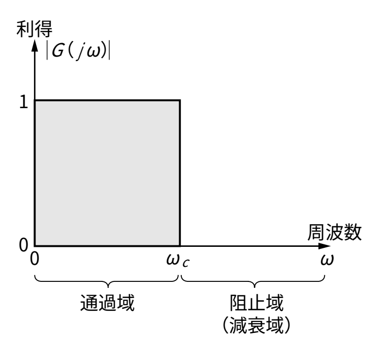

図1 理想的ローパス特性

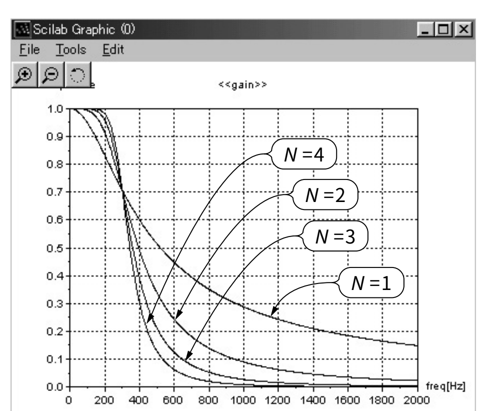

図2 バタワース形LPFの次数と遮断特性の関係

KEYWORD ── 伝達関数，周波数特性，バタワークス形フィルタ，極，零点，通過域，遷移域，過渡域，通過域損失，阻止域最小減衰量，通過帯域，比帯域幅

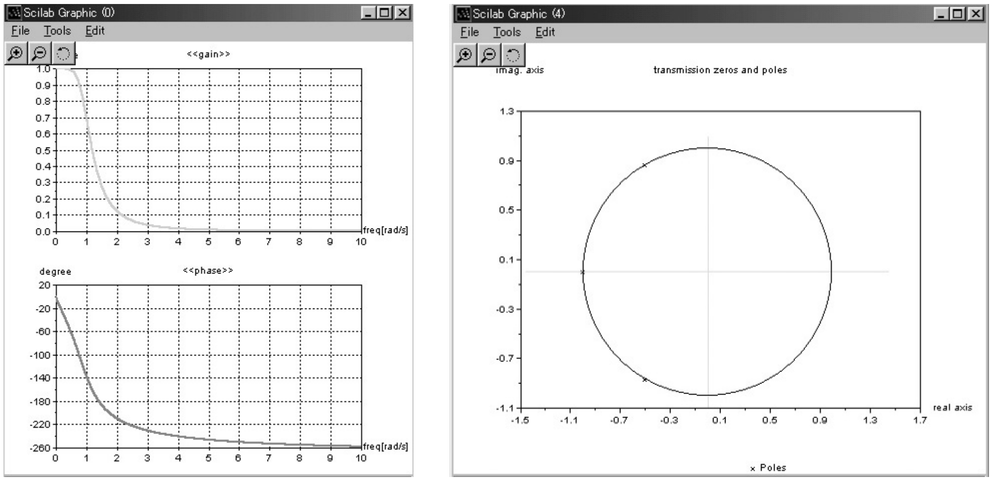

図3
3次のバタワース形基準
LPF（$\omega_c = 1$[rad/秒]）

（a）周波数特性　（b）零点の位置

それでは，Scilabを利用して，バタワース特性を有する基準LPF（$\omega_c = 1$[rad/秒]）の伝達関数$G_0(s)$を求め，周波数特性のグラフを表示してみてください．さらに，極と零点の値，s平面上の位置を調べてみましょう（**実行例2**，**図3**）．

実行例2

```
-->[pols,gain]=zpbutt(3,1) ↵                  ……… ①
 gain  =
    1.
 pols  =
 ! - 0.5 + 0.8660254i  - 1. + 1.225D-16i
   - 0.5 - 0.8660254i !
-->hs = gain/real(poly(pols,'s')) ↵            …… ②
 hs  =
         1
  -----------------
              2    3
   1 + 2s + 2s + s
-->aspec(hs,[0,10],'rad',0); ↵                 ……… ③
-->plzr(hs) ↵                                  ……… ④
```

［実行例2の説明］

① **zpbutt** 命令は，

[pols,gain]=zpbutt（次数，遮断周波数）

と記述する．ここで，pols は極，gain は正規化利得〔ローパス・フィルタの直流利得$|G(j0)|$を1にする〕を表す．たとえば，次数が3次のとき，3個の極をα，β，γ，正規化利得をG_0と表せば，伝達関数は，

$$G(s) = \frac{G_0}{(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)} \quad \cdots\cdots(4)$$

で与えられる．**実行例2**では，次数は3次で，遮断周波数$\omega_c = 1$であり，3個の極は，

$$\alpha = -0.5 + j0.8660254\left(= -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\beta = -1$$

$$\gamma = -0.5 - j0.8660254\left(= -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

であることがわかる

② 極と正規化利得を式(4)に代入し，伝達関数$G(s)$を求める．極から変数sの分母多項式$A(s)$を与える **poly** 命令（p.50参照），得られた$A(s)$が計算誤差のために複素数になるが，実数係数にするために **real** 命令（pp.64-65参照）を利用している．また，極の値の一つに，

`- 1. + 1.225D-16i`

があるが，虚部はD-16（10^{-16}）のオーダなので計算誤差と見なせる．虚部が0なので，この極は実数で，－1であることになる．このように，数値演算処理においては，計算誤差に注意を払う必要がある

③ **aspec** 命令（p.77参照）を用いて，利得と位相特性をグラフ表示する

④ **plzr** 命令は，伝達関数$G(s)$の安定な極（×で表記）と零点（○で表記）をs平面上に表示する．このとき，半径1の円（単位円という）が描かれており，$\omega_c = 1$のバタワース特性では単位円周上で左半面に3個の極が示される．なお，plzr 命令を実行する前には，かならずすべてのグラフ表示画面を消去すること

● 基準ローパス・フィルタの伝達関数と極

まず，**実行例2**の①の **zpbutt** 命令の次数を1から順に変えて，②で伝達関数，④で極の位置を調べてみてください（**図4**）．

● バタワース形 LPF の設計

いよいよ，LPFの設計仕様を与えて，所要の特性を満たす伝達関数を算出することに挑戦です．設計に際し，**図5**に示すバタワース特性を有するLPFの利得$G(s)$を考えます．すなわち，