第7章

数式表現とその物理的意味を理解しよう

ディジタル・フィルタの特性解析

本章では，ディジタル・フィルタの特性を解析する際に，ぜひとも知っておきたい数学的な表現方法について，Scilabを動かしながら解説する．ディジタル・フィルタによる信号処理は，どちらかといえば数式が先行する内容で難しいと思われがちである．そこで本章では，数式の背後にある物理的意味をわかりやすいことばを使って説明した．これらの知識をしっかりと自分のものにし，活用できるようにしてほしい．同時に，ディジタル信号処理の本質に関わる重要な内容についても述べたので，じっくりと読み進めていってもらいたい．
（筆者）

1 ディジタル信号と z 変換

ディジタル・フィルタで取り扱う信号は，**図1**に示すように離散時間k（整数で，$-\infty < k < +\infty$）に対する数値であり，ある一定の**サンプル時間**T［秒］（**サンプリング間隔**ともいう）ごとに取り出したディジタル信号になります（**サンプリング処理**）．ここで，サンプル時間Tの逆数，すなわち，

$$f_T = \frac{1}{T}\ [\mathrm{Hz}] \quad \cdots\cdots (1)$$

をサンプリング周波数といいます．これは，1秒間に含まれるディジタル信号の総個数に等しくなります．

このとき，**図1**のディジタル信号は時間系列として，

$$\{\cdots, x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], \cdots\} \quad \cdots\cdots (2)$$

あるいは，

$$\{x[k]\}_{k=-\infty}^{k=\infty} \quad \cdots\cdots (3)$$

のように順番に並べた数値集合（順序集合）です．

ところで，アナログ信号に対しては，ラプラス変換（第3章を参照）をはじめとして，フーリエ級数やフーリエ変換などの関数表現が知られています．一方，ディジタル信号の場合には数値集合を時間と信号値を示す関数として表すとなると，多少のくふうが必要となります．

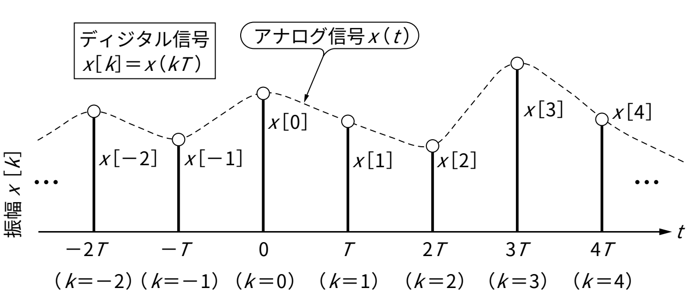

図1 ディジタル・フィルタで取り扱う信号——ディジタル信号

つまり，ディジタル信号の関数表現に“時間”という概念を盛り込むには，サンプル時間T［秒］をどのように数式の中に盛り込むのかが最大のポイントといえるでしょう．もっとも手っ取り早い方法は，サンプル時間Tの時間遅れを一つの変数に対応させる方法です．たとえば，T秒の遅れを変数z^{-1}で表せば，

$$\left\{\begin{array}{ll}
z^{-2} = \left(z^{-1}\right)^{2} = z^{-1}\times z^{-1} & \to 2T［秒］の遅れ \\
z^{-3} = \left(z^{-1}\right)^{3} = z^{-1}\times z^{-1}\times z^{-1} & \to 3T［秒］の遅れ \\
z^{-4} = \left(z^{-1}\right)^{4} = z^{-1}\times z^{-1}\times z^{-1}\times z^{-1} & \to 4T［秒］の遅れ \\
\vdots & \vdots \\
z^{-k} = \left(z^{-1}\right)^{k} = \underbrace{z^{-1}\times z^{-1}\times\cdots\times z^{-1}\times z^{-1}}_{z^{-1}が k 個} & \to kT［秒］の遅れ \\
\vdots & \vdots
\end{array}\right. \quad \cdots\cdots (4)$$

となり，べき乗z^{-k}の表現形式で時間原点0［秒］からの遅れ時間を代用させることができます．以下に，べき乗z^{-k}の形式で表したディジタル信号の翻訳例を示すので．数式表現とディジタル信号との関わり合いを頭に入れてください．

【翻訳例1】 3

定数項3は，$z^0=1$より，$3=3\times z^0=3\times(z^{-1})^0$に等しいので，時刻$T=0$［秒］における信号値が3であることを示します．

【翻訳例2】 $4z^{-3}$

z^{-3}は$3T$［秒］遅れた時刻$t=3T$［秒］を表し，z^{-3}の係数が4なので，信号値が4であることがわかります．まとめてみると，$4z^{-3}$は原点より右側に位置し，$3T$［秒］遅れた時刻におけるディジタル信号値が4となります．

このように，信号の数式（べき乗）表現を「時刻」と「信号値」の二つのパラメータに読み分けるという“翻訳するテクニック”を身に付ければ，ディジタル・フィルタを学習していくうえでの大きなハードルを越えたことになります．しっかりと覚えておきましょう．

一般的に，kT［秒］遅れた時刻（原点の右側に位置する）にお

KEYWORD——z変換，サンプリング時間，逆z変換，ztrans，zrep，osc，tmax，iztrans，差分方程式，有理関数，インパルス応答，周波数応答，ディジタル・フィルタ

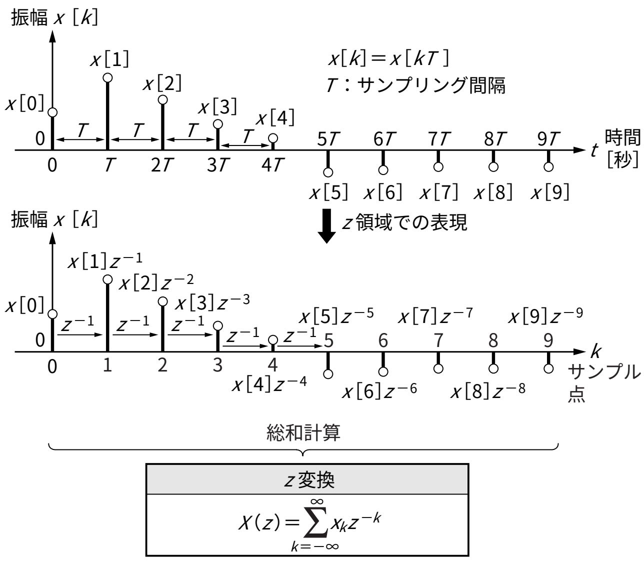

図2　ディジタル信号とz変換

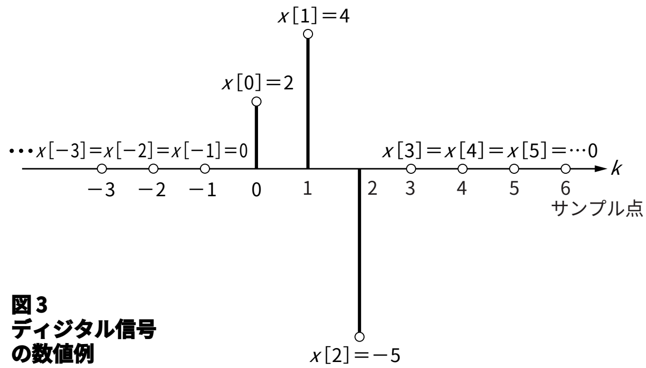

図3 ディジタル信号の数値例

ける振幅値 $x[k]$ のディジタル信号は，

$$x[k]z^{-k} \quad \cdots\cdots(5)$$

と書けます．また，式(2)あるいは式(3)のディジタル信号全体は，

$$\cdots+x[-1]z^{1}+x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots+x[-1]z^{1}+\cdots$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]z^{-k} \quad \cdots\cdots(6)$$

のべき級数和として表されます．ここで，式(6)は，ディジタル信号，

$$\{x[k]\}_{k=\infty}^{k=\infty}$$

を変換したものという意味から，時間系列を表す変数 x の大文字を用いて $X(z)$ と表せば，

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]z^{-k} \quad \cdots\cdots(7)$$

となります．

このX(z)は，ディジタル信号処理において，"**z変換**"と呼ばれているものです(**図2**)．

ところで，考察の対象となるものは，ある時刻を起点として発生するディジタル信号系列およびその信号処理プロセスなので，起点とする時刻を $k=0$ として，

$$x[k]=0\ ;\ k<0 \quad \cdots\cdots(8)$$

とすれば，式(7)は，

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k} \quad \cdots\cdots(9)$$

と表されます．ここで，式(7)は**両側z変換**，式(9)は**片側z変換**と区別していますが，ここでは式(9)の片側z変換を単にz変換と称することにします．

また，$X(z)$ からディジタル信号，

$$\{x[k]\}_{k=0}^{k=\infty}$$

を逆に算出することができます．この操作は**逆z変換**と呼ばれています．z変換および逆z変換に基づく $x[k]$ と $X(z)$ の関係を，

$$x[k] \Leftrightarrow X(z) \quad \cdots\cdots(10)$$

と表記して，**z変換対**といいます．

2 Scilabで見るz変換と逆z変換

それでは，z変換が表す信号波形をビジュアル表示して確認してみましょう．まず，**図3**のディジタル信号，

$$x[0]=2,\ x[1]=4,\ x[2]=-5,\ x[k]=0\ (k\geqq 3)$$

のz変換を求め，波形をグラフ表示します．順を追って，Scilabの実行画面とともに，実行命令，処理手順，処理結果を示すので，みなさんも手抜きなしで一つずつ処理命令を入力してください．

● ディジタル波形の信号値を入力する

信号値を行ベクトル(横ベクトル)として入力するには，中括弧[ ]で囲んで，スペース(空白)，あるいはカンマ「,」で区切って入力します(**実行例1**)．ここで，ディジタル波形の信号名をxとしていますが，アルファベット文字で始まる任意の信号名を付けることができます．

実行例1

```
-->x=[2,4,-5,0,0,0,0,0,0] ↵                    ……①
x  =
  !  2.   4.   -5.   0.   0.   0.   0.   0.   0. !

-->x=[2 4 -5 0 0 0 0 0 0] ↵                    ……②
x  =
  !  2.   4.   -5.   0.   0.   0.   0.   0.   0. !

-->x=[2,4,-5,0,0,0,0,0,0]; ↵                   ……③

-->x ↵                                         ……④
x  =
  !  2.   4.   -5.   0.   0.   0.   0.   0.   0. !
```