第8章

ディジタル・フィルタの設計にアナログ・フィルタの設計手法を活用しよう

IIRフィルタの伝達関数設計

ここでは，インパルス応答の継続時間が無限で，出力が入力に戻されるフィードバック(帰還)構成のIIRフィルタの伝達関数設計について説明する．この種のフィルタの設計は，古くから用いられているアナログ・フィルタの設計手法(第5章で詳述)を活用できるメリットがあり，アナログ回路設計技術者にとっては，とっつきやすい内容でもある．また，Scilabにはさまざまなタイプのフィルタの伝達関数を求めるための有用なツールが用意されているので，その利用法についても解説する．(筆者)

1 IIR フィルタとは

いま，T［秒］ごとにサンプリングした入力信号データ系列(数値データの並び)を$x[k]$，IIR フィルタからの出力信号データ系列を$y[k]$とするとき，入力と出力が，

$$y[k]=a_0x[k]+a_1x[k-1]+\cdots+a_Mx[k-M]$$
$$+b_1y[k-1]+b_2y[k-2]+\cdots+b_Ny[k-N] \quad \cdots\cdots(1)$$

で表される差分方程式で結び付けられます(**図1**)．つまり，現時刻kT［秒］における出力データ$y[k]$が，

- $x[k]$　：現時刻kT［秒］の入力データ
- $x[k-1]$　：現時刻よりT［秒］前の入力データ
- ⋮
- $x[k-M]$　：現時刻よりMT［秒］前の入力データ
- $y[k-1]$　：現時刻よりT［秒］前の出力データ
- ⋮
- $y[k-N]$　：現時刻よりNT［秒］前の出力データ

の$(M+N+1)$個のデータに重み付けしたものの総和として計算できます．とくに注意したいことは，過去の出力データがフィードバックされて，現時刻の出力データに関連づけされていることです．

式(1)は，出力信号$y[k]$を1サンプルずつ遅らせたいくつかの値，すなわちN個の過去の出力$y[k-n]$とフィルタ係数b_n ($n=1, 2, \cdots, N$)との積，および$(M+1)$個のフィルタ係数a_m ($m=1, 2, \cdots, M$)と入力信号$x[k-m]$との積の総和を求めて，現時点の出力$\mathbf{y}[k]$が計算できることを示しています．

そこで，式(1)の差分方程式をz変換すると，

$$Y(z)=a_0X(z)+a_1z^{-1}X(z)+\cdots+a_Mz^{-M}X(z)$$
$$+b_1z^{-1}Y(z)+b_2z^{-2}Y(z)+\cdots+a_Nz^{-N}Y(z)$$

となり，伝達関数は，

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_Mz^{-M}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}-\cdots-b_Nz^{-N}}=\frac{A(z)}{B(z)} \quad \cdots\cdots(2)$$

の有理関数として表されます．ここで，分母多項式$B(z)$の定数項が1になることは，しっかりと記憶しておいてください．このことから，IIR フィルタの伝達関数を設計したときに分母多項式の定数項が1でなければ，分子と分母を定数項でわり算する必要があります．

式(2)の伝達関数$H(z)$の各変数は，次のような意味をもっています．

▶a_m，b_n

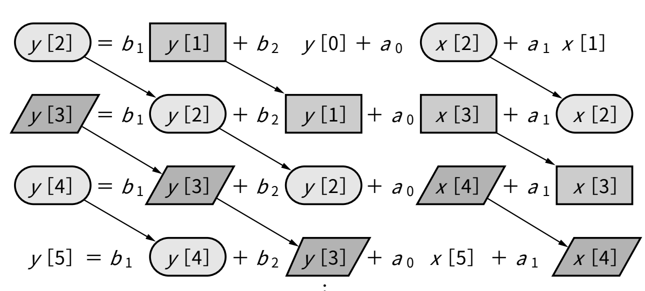
タップ係数，あるいはフィルタ係数と呼ばれ，IIR フィルタの特性を定める数値です．

▶M

IIR フィルタの分子多項式$A(z)$の最高次数であり，タップ係数の総個数は$(M+1)$個となります．

▶N

IIR フィルタの分母多項式$B(z)$の最高次数であり，タップ係数の総個数はN個です．



$y[k]=b_1y[k-1]+b_2y[k-2]+a_0x[k]+a_1x[k-1]$

($y[k-1]$，$y[k-2]$はそれぞれ1サンプル前，2サンプル前の出力信号 $x[k-1]$は1サンプル前の入力信号)

図1　差分方程式とIIR フィルタ($M=1$，$N=2$の場合)

KEYWORD ── IIR フィルタ，s-z 変換，ディジタル・フィルタ，双1次変換，プリワーピング，ssbutt，ローパス，ハイパス，バンドパス，バンド・エリミネート

ところで，IIR フィルタの設計法には多様な手法が考案されていますが，ここでは利得特性の設計仕様を満たす伝達関数設計に焦点をあて，従来のアナログ・フィルタの回路網理論の成果を利用する方法を紹介します．この設計法は，アナログ-ディジタル変換，略して s-z 変換と呼ばれ，ラプラス変換の変数 s と z 変換の変数 z の相互関係を利用するものです．

s-z 変換は，アナログ・フィルタの伝達関数を変換して設計仕様を満足するディジタル・フィルタの伝達関数を効率よく求める手法であり，次のような特徴があります．

① アナログ・フィルタの伝達関数近似は，すでに完成された理論であり，その設計公式は比較的簡単な数式で表されている（第5章を参照）．そのため，アナログ・フィルタの設計公式に基礎をおけば，ディジタル・フィルタの設計が関数変換（または変数変換）に帰着されることになり，簡単化が図れる

② アナログ・フィルタの特性を，ディジタル・フィルタを用いてシミュレートすることに応用上有用なことが多々ある（第6章を参照）

2 アナログ-ディジタル変換（s-z 変換）の考え方

アナログ・フィルタの解析で利用したラプラス変換においては，微分が s，積分が $1/s$ で表されますが，この微分および積分処理をディジタル的にシミュレート処理することを考えるのです．それでは，微分処理のシミュレートから始めましょう

● 微分処理のディジタル・シミュレーション

まず，入力信号 $x(t)$ を微分した値が出力信号 $y(t)$ となるアナログ微分は，

$$y(t)=\frac{dx(t)}{dt} \quad \cdots\cdots (3)$$

で表されます．両辺をラプラス変換すると，

$$Y(s)=sX(s) \quad \cdots\cdots (4)$$

ただし，$X(s)$：入力信号のラプラス変換，

$Y(s)$：出力信号のラプラス変換

となり，伝達関数 $G(s)$ は，

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=s \quad \cdots\cdots (5)$$

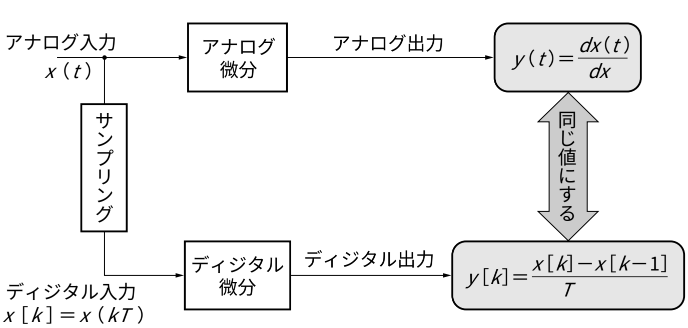


図2　アナログ微分のディジタル・シミュレーション

と求まります．

一方，第6章で説明した微分方程式のディジタル化を利用すると，式(3)をサンプリング（$t=kT$）して，

$$y[k]=\frac{x[k]-x[k-1]}{T} \quad \cdots\cdots (6)$$

ただし，$y[k]=y(kT)$，$x[k]=x(kT)$，$x[k-1]=x((k-1)T)$

となる関係が得られます（**図2**）．

そこで，式(6)の両辺を z 変換すると，

$$Y(z)=\frac{X(z)-z^{-1}X(z)}{T}=\frac{1-z^{-1}}{T}X(z)$$

ただし，$X(z)$：入力信号の z 変換，

$Y(z)$：出力信号の z 変換

となり，ディジタル微分の伝達関数 $H(z)$ は，

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-z^{-1}}{T} \quad \cdots\cdots (7)$$

と求まります．

以上より，

アナログ微分の伝達関数	s
॥	
ディジタル微分の伝達関数	$\frac{1-z^{-1}}{T}$

とすれば，アナログ微分の複素変数 s とディジタル微分の変数 z^{-1} の相互変換式として，

$$s=\frac{1-z^{-1}}{T} \quad \cdots\cdots (8)$$

を導き出すことができます．この s 平面から z 平面への変換が，**アナログ-ディジタル変換**（あるいは，変数をとって **s-z 変換**）と呼ばれています．

ところで，式(8)を変数 z について解くと，

$$z=\frac{1}{1-sT} \quad \cdots\cdots (9)$$

となり，

$$z=\frac{1}{1-sT}=\frac{\frac{1}{2}(1-sT+1+sT)}{1-sT}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+sT}{1-sT}\right) \quad \cdots\cdots (10)$$

と表されます．このとき，アナログ・フィルタの周波数特性は $s=j\omega$ を代入して計算するので，

$$z=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+j\omega T}{1-j\omega T}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1+j\omega T}{1-j\omega T}\right) \quad \cdots\cdots (11)$$

と表されます．このとき，右辺の第1項の1/2は実軸上の平行移動量を表します．第2項は，

$$\frac{|1+j\omega T|}{|1-j\omega T|}=\left|\frac{1+j\omega T}{1-j\omega T}\right|=\frac{\sqrt{1+(\omega T)^2}}{\sqrt{1+(-\omega T)^2}}=1 \quad \cdots\cdots (12)$$

であり，周波数 ω に対して長さが一定なので，半径1の円を表しますが，前に付いている係数1/2から半径は1/2の円であることがわかります．つまり，s 平面の虚軸（$s=j\omega$）は z 平面にお