

やり直しのための通信数学

三谷 政昭

第14回 ウェーブレット変換とマルチレート信号処理

前回(2006年11月号, pp.193-200)と前々回(2006年8月号, pp.160-167)の2回にわたって、2次元ウェーブレット変換による画像処理の代表的な応用事例として、画像データの圧縮、雑音除去、画像の強調、欠陥検出、領域分割などを取り上げ、具体的な数値例を示しながら、わかりやすく解説した。とくに今回は、表計算ソフトExcelを利用し、2次元ウェーブレット変換/逆変換のもつ基本的な性質のうち、どの性質をどのように応用するのかをしっかりと習得していただいたつもりである。

今回は、ウェーブレット変換/逆変換を実現するための基本的な要素として、マルチレート信号処理の考え方を紹介する。まず、ローパス・フィルタとハイパス・フィルタの組み合わせによって、ウェーブレット変換/逆変換を行うシステムが得られることを説明する。続いて、マルチレート信号処理の基本となるレート変換とフィルタ構成の関係について述べる。(筆者)

ウェーブレット変換とダウン・サンプリング

いま、デジタル信号を、 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots$ と左から右へと順に入力して、2個の信号を1ブロックとするウェーブレット変換(WT)値は、

(i) ブロック1($m=1$)

$$C_0^{(0)}[1] = \frac{x_1 + x_2}{2}, C_1^{(0)}[1] = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

(ii) ブロック2($m=2$)

$$C_0^{(0)}[2] = \frac{x_3 + x_4}{2}, C_1^{(0)}[2] = \frac{x_3 - x_4}{2}$$

(iii) ブロック3($m=3$)

$$C_0^{(0)}[3] = \frac{x_5 + x_6}{2}, C_1^{(0)}[3] = \frac{x_5 - x_6}{2}$$

⋮

のように計算される(図1)。ここで、 $C_0^{(0)}[m], C_1^{(0)}[m]$ は、それぞれ m 番目のブロックの直流成分、周波数1の基本ウェーブレット成分であり、一般式は、式(1)、式(2)のようになる。

$$C_0^{(0)}[m] = \frac{x_{2m-1} + x_{2m}}{2} \dots\dots\dots(1)$$

$$C_1^{(0)}[m] = \frac{x_{2m-1} - x_{2m}}{2} \dots\dots\dots(2)$$

ところで、式(1)と式(2)の計算処理において、1ブロックのWT値 $\{C_0^{(0)}[m], C_1^{(0)}[m]\}$ は、2個の入力信号 $\{x_{2m-1}, x_{2m}\}$ からそれぞれ計算されるので、データ数は半分になることに気付く。言い換えれば、WT値計算後のデータに対して1サンプルの間引き(デシメーション: decimation)を行う必要がある。この間引き操作を“ダウン・サンプリング”(down sampling)といい、二つの計算処理によって信号は2分割され、全体としてデータ数を一定に保つことになる。なお、ダウン・サンプリングを実現するものを“ダウン・サンプラ”(down sampler)という。

例題1

図2のデジタル信号のWT値として、直流と基本ウェーブレットの各成分 $C_0^{(0)}[m], C_1^{(0)}[m]$ を求めよ。

解答1

式(1)と式(2)に基づき、算出する(図3)。このとき、8個のデジタル信号に対してWT値 $C_0^{(0)}[m], C_1^{(0)}[m]$ はどちらも4個と少なく、サンプル・レートが1/2倍になること(ダウン・サンプリング)がわかる。

| | $m=1$ | $m=2$ | $m=3$ | ... |
|--------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----|
| デジタル信号 $\{x_k\}$ | $x_1 \quad x_2$ | $x_3 \quad x_4$ | $x_5 \quad x_6$ | ... |
| | $\frac{x_1 + x_2}{2}$ | $\frac{x_3 + x_4}{2}$ | $\frac{x_5 + x_6}{2}$ | ... |
| 直流成分の計算 $\{C_0^{(0)}[m]\}$ | $C_0^{(0)}[1]$ | $C_0^{(0)}[2]$ | $C_0^{(0)}[3]$ | ... |
| | $\frac{x_1 - x_2}{2}$ | $\frac{x_3 - x_4}{2}$ | $\frac{x_5 - x_6}{2}$ | ... |
| 基本ウェーブレット成分の計算 $\{C_1^{(0)}[m]\}$ | $C_1^{(0)}[1]$ | $C_1^{(0)}[2]$ | $C_1^{(0)}[3]$ | ... |

図1 ウェーブレット変換(WT)の基本的な計算処理プロセス

分析フィルタ・バンクによるウェーブレット変換

ここでは、式(1)と式(2)の計算がそれぞれローパス(低域通過)型とハイパス(高域通過)型のデジタル・フィルタに相当することを示す。なお、デジタル・フィルタの解析

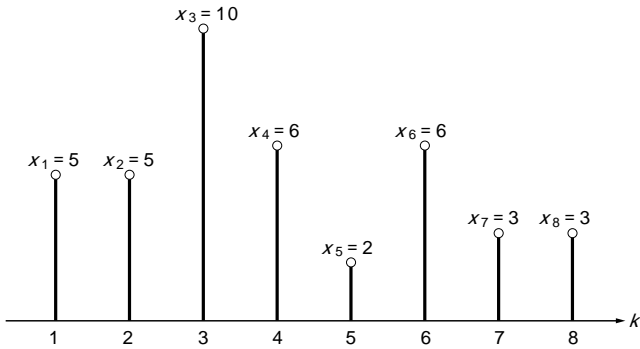


図2 例題1 のデジタル信号 $\{x_k\}_{k=1}^{k=8}$

としての伝達関数, 周波数特性, システム構成などの詳細を知りたい方には, 拙著「Scilab で学ぶデジタル信号処理」(2006年7月発行, CQ 出版社)をお勧めしたい。

まず, 式(1), 式(2)を z 変換して伝達関数を計算すると,

$$H^{(L)}(z) = \frac{z^{-1} + 1}{2} \dots\dots\dots (3)$$

$$H^{(H)}(z) = \frac{z^{-1} - 1}{2} \dots\dots\dots (4)$$

となり, 図4のようにフィルタを構成できる。なお, $H^{(L)}(z)$ は直流成分, $H^{(H)}(z)$ は基本ウェーブレット(周波数1)を出力するフィルタである。

また, 各フィルタの出力 $\{e_m^{(L)}, e_m^{(H)}\}$ は,

【ローパス・フィルタの出力】

$$e_m^{(L)} = \frac{x_{2m-1} + x_{2m}}{2} \dots\dots\dots (5)$$

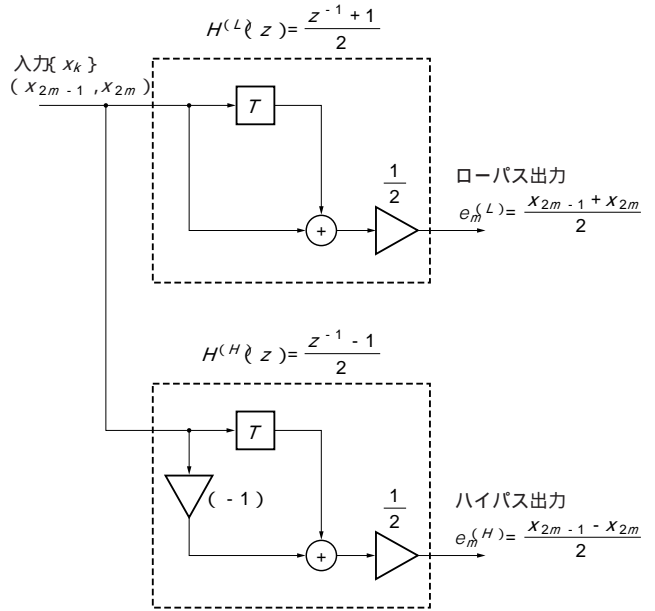


図4 分析フィルタ・バンクのシステムの構成例()

【ハイパス・フィルタの出力】

$$e_m^{(H)} = \frac{x_{2m-1} - x_{2m}}{2} \dots\dots\dots (6)$$

であり, $e_m^{(L)}$ は2サンプルの直流成分(平均値) $C_0^{(0)}[m]$, $e_m^{(H)}$ は基本ウェーブレット成分(差分の平均値) $C_1^{(0)}[m]$ に等しい。

また, 図4の二つのデジタル・フィルタのゲイン特性については, 式(5)と式(6)の伝達関数において,

$$z = e^{j2\pi fT} : \pi \text{ 秒 }] \text{ はサンプリング間隔}$$

を代入して絶対値を計算すればよく,

$$|H^{(L)}(e^{j2\pi fT})| = |\cos(\pi fT)| \dots\dots\dots (7)$$

$$|H^{(H)}(e^{j2\pi fT})| = |\sin(\pi fT)| \dots\dots\dots (8)$$

となる(図5, p.188)。図5(a)より, ゲイン特性 $|H^{(L)}(e^{j2\pi fT})|$ は低い周波数成分が通りやすい“ローパス(Low Pass)フィルタ”であり, 他方のゲイン特性 $|H^{(H)}(e^{j2\pi fT})|$ は図5(b)より高い周波数成分が通りやすい“ハイパス(High Pass)フィルタ”であることがわかる。ここまでの式表現における上付き文字の(L)はローパス・フィルタ, (H)はハイパス・フィルタを意味していることもわかりいただけるであろう。

以上より, 図4の各フィルタは周波数帯域ごとのスペク

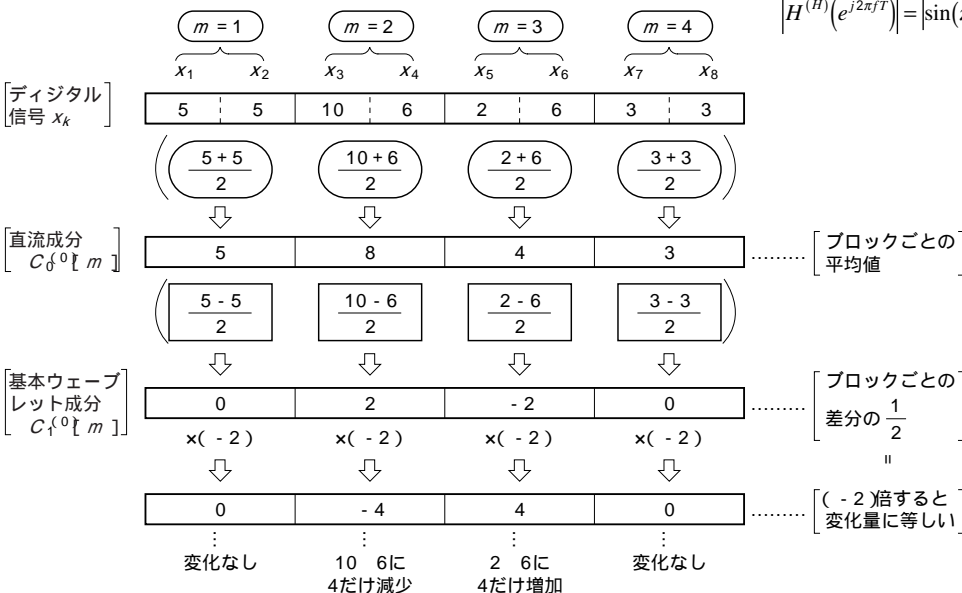


図3 例題1 のWT計算