

組み込みソフトへの数理的アプローチ

第5回

様相論理で変化を扱う ——様相とは何か、冥王星って今どうなの

藤倉 俊幸

1 はじめに

様相論理は変化を扱う

様相(modalityまたはmode)とは、必然・偶然・可能・不可能などに共通する概念である。この概念を統一した形で論理的に扱うのが様相論理である。

「論理的に扱う」とは、否定(¬)や存在(∃), 含意(⇒), 連言(∧), 選言(∨)などのように使えることである。正しいことを正しいと表し、あるときは美しく、あるときは単純な計算で、分かりやすく示すことができる。連言(∧)や選言(∨)というなじみのない言葉が出てきたが、これはandとorのことなので、技術者ならandやorに読み替えた方が直感的に分かりやすいかもしれない。

存在(∃)とすべて(∀)を使うことで世界をモデルとして記述できるようになることを前回までに説明した。しかし、前回までに扱った世界は、変化のない世界か、変化する世界の瞬間のスナップショットにすぎない。実際の世界は変化する。その変化する状況を記述するのに適した論理が、様相論理である。それは、様相論理が世界と世界の関連を扱う論理だからである(表1)。

組み込みシステムは、外界の状況変化に応じて制御し続けるものである。従って、その仕様記述には、変化を扱う様相論理が便利である。外界のある瞬間のデータを切り取ってそのデータを変換して終了するタイプのプログラムの仕様記述では、述語論理で十分かもしれないが、組み込みシステムのように終了せずに動き続けて、かつ前の状態に依存するようなタイプのプログラムの場合は、変化そのものを仕様として記述できなければならない。

否定や存在などと同じように必然や可能を扱うということはどういうことだろうか。まず、Aという命題が成立することが必然であることを Aとして、可能であることを Aとしたときに、

$$A \rightarrow \neg \neg A \dots\dots\dots(1)$$

というような扱いができるということが含まれる。つまり、「Aであることは必然である」ということと「Aでないこと(¬A)は

不可能である(¬¬)は同じことであるということを示号によって表して、やを使った論理式と同じように変形して新しい関係を見出したり導いたりできるということである。

そしてさらに、(1)式は両辺の否定を取ることで

$$A \rightarrow \neg \neg A \dots\dots\dots(2)$$

のように変形することもできる。つまり、必然()か可能()かのどちらかを明確にすれば、片方から片方を導くことができるということが、導けてしまうということである。少ない概念を導入するだけで多くのことを表現できる。これも様相を論理的に扱うということである。

2 変化を記述する

犬に出会うのは必然 必然や可能の例

必然()や可能()を論理式に含めると、変化する状況を記述できるようになる。その例を図1に示す。様相というのは、状態とか有様とかいう意味がある。ちなみに も も付けないものは実現した事実を表す。可能()は蓋然と呼ばれる場合もある。

図1に示した道を左から右に進んでいるとする。この道の先FからJには犬または羊がいる、あるいは何もいない。後戻りはできないとして、A地点では犬または羊に出会う可能性がある。よって、「(犬または羊に出会う)」とできる。B地点に進めば、必然的に犬に出会うことになる。よって、「(犬に出会う)」とできるが、それは、その先のF地点とG地点に犬がいるからである。そこに、犬がいる必然性はあるのか、猫では駄目

表1 論理の種類

論理の種類	特徴	使い道
命題論理	連言(∧)や選言(∨)	プログラム・コードの条件記述
述語論理	存在(∃)とすべて(∀)	変化しない世界、スナップ・ショット一つの世界の中の関係、プログラムの静的仕様記述
様相論理	必然()か可能()	変化する世界、世界のつながり方、複数の世界間関係、プログラムの動作仕様記述

この先、どうなるのかを記述できる：アクセス可能性

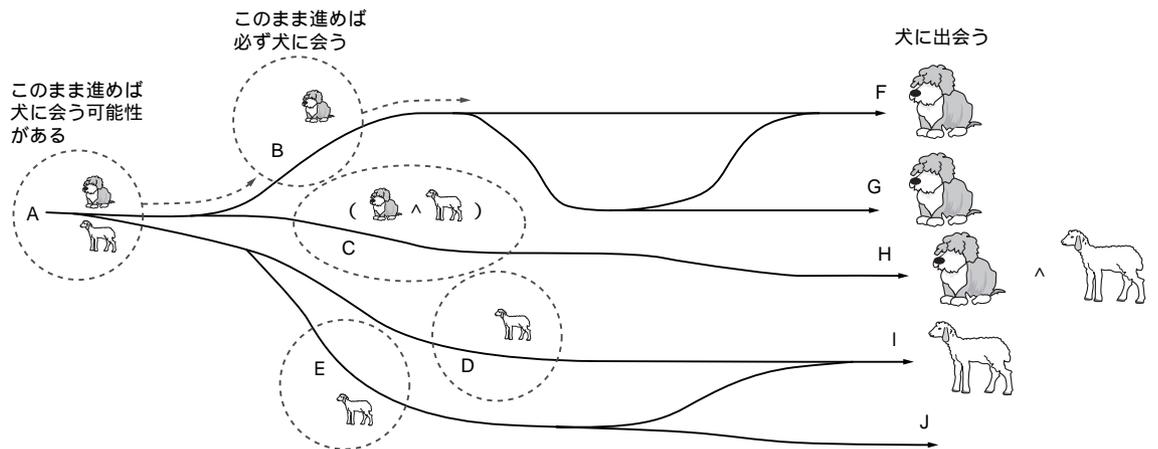


図1 変化する状況の記述

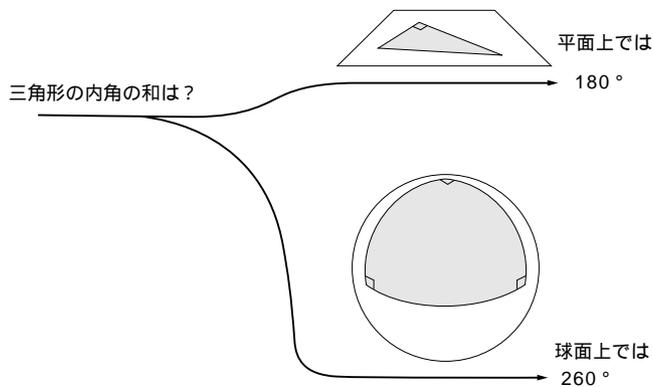


図2 三角形の内角の和

なのか、なぜ犬でなければならないのか、については考えないことにする。ここまで考えると哲学風になってしまうからだ。たまたま犬の絵をそこに描いてしまっただけである。

とにかくそこには事実として犬がいるので、 \wedge を付ける必要はない。同様に、Cの方向に進めば、必然的に犬と羊に出会うことになる。Dに進んだ場合は、犬に出会う可能性はないが、羊に出会う必然性がある。Eに進むと、犬に出会う必然性はないが羊に出会う可能性はある。

冥王星はどうなった？ 様相とは何か

このように、「犬に出会う」という命題の正しさにも何通りかある。「必ず出会う」、「出会うかもしれない」、「出会う」など、これらの違いを様相と呼ぶ。

「太陽系には、惑星が9個ある」という命題は、つい最近正しくなくなってしまった。このように、「たまたま正しい」命題と「必然的に正しい」命題がある。たとえば、「9の平方根は3である」という命題は、「永遠に正しい」命題である。「サンタクロースがいる」という命題は、ある年齢では「正しいと信じられている」。これらの違いも様相による違いである。基本的な様相としては、知識、必然性、時間などがある。また、一方で三角形の内角の和のように条件によって変わるものもある(図2)。こちらは、必然的に正しい命題の精密化であり、普通は様相といわない。

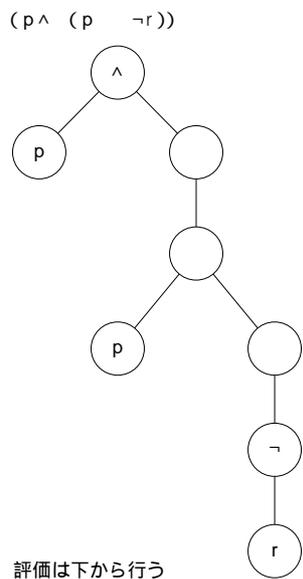


図3 様相論理式の評価順

評価は下から行う

3 様相論理式の評価

\neg を様相オペレータと呼ぶ。様相オペレータは否定(\neg)と同じ単項オペレータなので、様相論理式の真偽を評価する場合は、まず最初に \neg を結合させて評価する。次に \wedge を結合させて評価し、最後に \rightarrow を評価するのが標準的なオペレータの優先度になる。これ以外の順序で計算する場合はかっこによって評価順を指示しなければならない。様相論理式の評価を行う場合は、図3に示したように木構造に分解して下から真偽