

やり直しのための通信数学

三谷 政昭

第16回 ウェーブレット変換のまとめ(その1) 基本原理と時間周波数解析

ほぼ2年(15回連載)にわたり、ウェーブレット変換の基礎から応用まで、ハール・ウェーブレット変換を例示することによって、なるべく難しい数式を使わずに、わかりやすい説明を心がけて執筆してきた。

今回からは、ウェーブレット変換の総まとめと題し、変換のもつ物理的な意味と数式表現の関係を中心に総括する。まず、基本原理と時間周波数解析の考え方を取り上げ、最低限必要となる数学的知識、専門用語を思い起こしていただくことにする。(筆者)

ウェーブレット事始め

ウェーブレット(wavelet)理論の誕生は、1980年代初めで、フランスの石油探査技師 Morlet が、石油の埋蔵場所を特定するため、人工地震波信号の精密な時間(埋蔵場所の特定)と周波数(埋蔵資源の分別、石油かどうか)の情報を同時解析するために考案した(図16.1)。つまり、ウェーブレットは、“時間的变化の特徴”と“周波数成分の混じり方”を知るために用いられ、時間と周波数に関わる信号情報を同時に抽出することができる。

ところで、周波数解析の手法としては古典的なフーリエ変換(Fourier Transform)が真っ先に挙げられる。フーリエ変換は周波数成分を解析するための手法であり、コンピュータ処理するためのDFT(Discrete Fourier Transform)と、その高速計算バージョンであるFFT(Fast Fourier Transform)が有名どころである。

たとえば、人の声の性質(声色、声紋)をはじめとして、楽器の音色、画像、自然界のあらゆる信号はすべて、固有の周波数成分の混じり方を有している。こういった周波数成分の混じり方を解析できるのが、フーリエ変換である。

しかし、フーリエ変換では信号のもつ性質をすべて周波数情報に置き換えてしまうため、時間に関連する情報が失われてしまう。言い換えれば、時間とともに刻々と変動する信号であっても、フーリエ変換では周波数成分だけしか得られないので、大ざっぱな信号情報しか見いだせない(図16.2(a))。

そこで、図16.2(b)のように時間を一定間隔ずつ切り出しては次々にフーリエ変換する手法として、短時間フーリエ変換(short-time Fourier Transform)が考案された。ただ、解析する時間幅が一定に固定されていることが最大のネックとなり、時間と周波数を同時に解析するには物足りないものであった。

この物足りなさを埋め合わせるものとして、周波数に応じて解析する時間幅を変化させるというウェーブレットが発案され

たのである。つまり、周波数の低い成分に対しては“解析する時間幅を長くする”，高い成分に対しては“逆に、短くする”のである。このように、解析する時間幅を周波数に反比例させることによって、多くの信号解析が合理的に行えるようになり、自然の摂理にかなう「時間と周波数を同時に解析する手法、すなわちウェーブレット変換」が確立されたのである。

ウェーブレットの基本原理

フーリエ変換では、信号の周波数成分を解析するためのものさしとして「さまざまな周波数のsin波、およびcos波」が用意されている。

これに対して、ウェーブレットでは、信号の時間と周波数の関係を同時に解析するため、基準とするものさしとして、たった一つのマザー・ウェーブレット(mother wavelet)と呼ばれる小さな波の欠片が用意されているだけである(図16.3)。なお、マザー・ウェーブレットを基本ウェーブレットともいう。

この小さな波の欠片が八面六臂の活躍をすることになるわけで、基準となる一つのマザー・ウェーブレットをいろいろな縮尺に引き伸ばすことにより、周波数のものさしであるウェーブレットを多数用意して、時間軸方向に平行移動させながら解析したい信号にあてがい、時間と周波数の情報を同時に得るのである。こうした処理によって、2次元的にダイナミックに解析

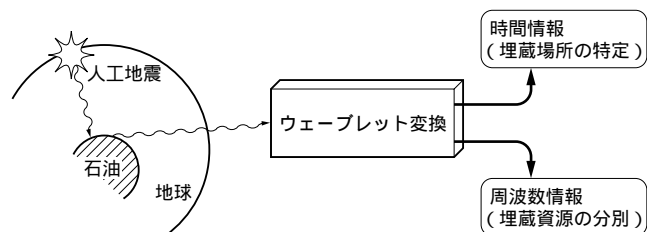
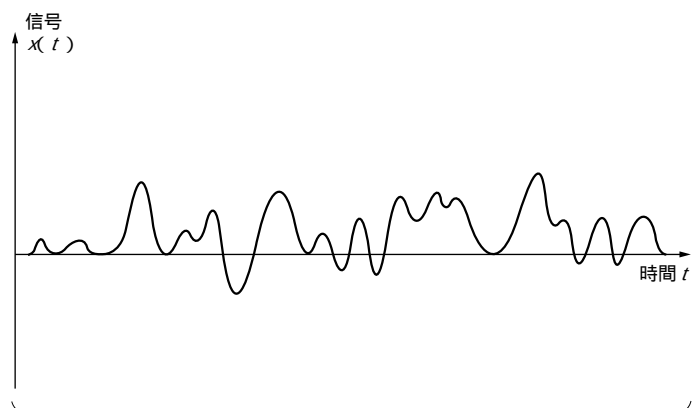
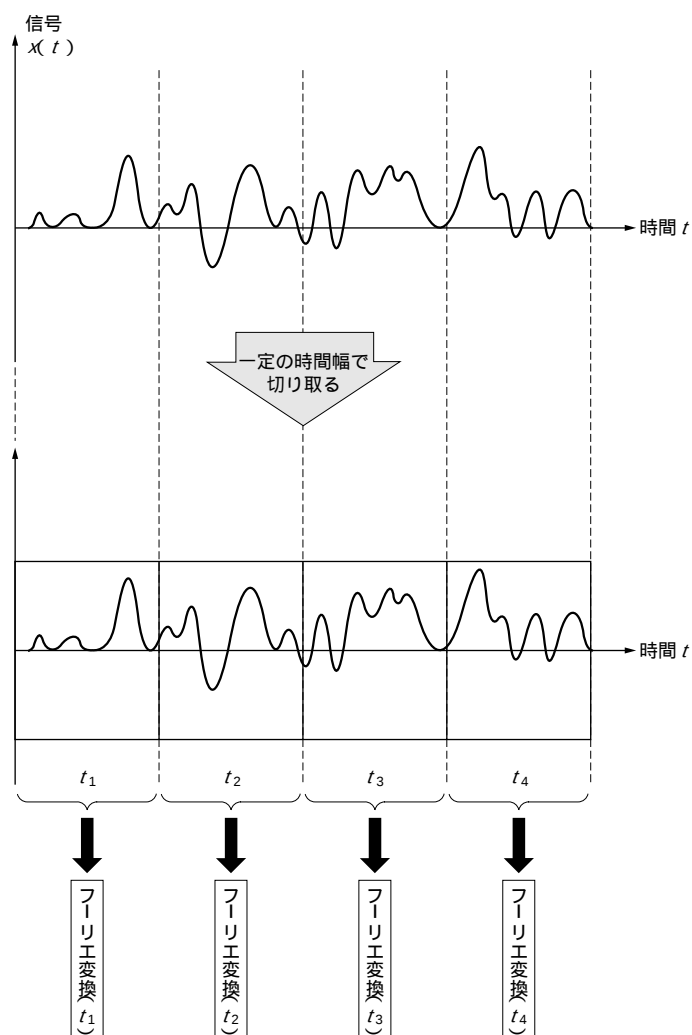


図16.1 ウェーブレット変換による石油探査のイメージ



大ざっぱな周波数情報？！

(a) フーリエ変換



(b) 短時間フーリエ変換

図 16.2 フーリエ変換による周波数成分の分析

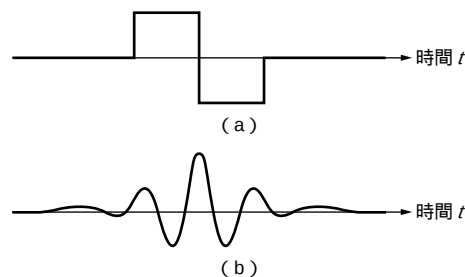


図 16.3 マザー・ウェーブレットの例

した結果として、時間と周波数の情報が同時に表示されるというぐあいである(図 16.4)。

ここで、ウェーブレットを信号にあてがって解析する、というところの計算イメージは、

信号の中に、あてがったものさしであるウェーブレットに似た成分がどれくらい含まれているのか測定する

ということになる。信号とウェーブレットの相関値を求めることに等価であり、関数の内積によって計算されるのが一般的である。すなわち、信号 $x(t)$ とウェーブレット $\psi_\ell(t)$ の内積は、

$$d_\ell = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi_\ell(t)} dt \dots\dots\dots (1)$$

で定義される。ここで、複素共役の記号は、ウェーブレット $\psi_\ell(t)$ が複素関数のときには無視できないが、実関数のときにはとりあえず無視してもかまわないので、内積の計算は $x(t)$ と $\psi_\ell(t)$ をかけ合わせて積分することになる。しかるに、 $x(t)$ と $\psi_\ell(t)$ の似ている度合いが、積分計算することによって数値化されるという“ウェーブレット $\psi_\ell(t)$ ”のイメージが導かれる。

たとえば、sin 波形の信号をウェーブレット $\psi_\ell(t)$ で解析することを考えてみよう(図 16.5)。図 16.5(a)では、信号とウェーブレットの周波数が一致しているので、それらをかけ合わせると正の値になり、積分値は「信号の中にウェーブレット $\psi_\ell(t)$ に似た成分が含まれる」という情報を与えることになる。一方、図 16.5(b)のように信号とウェーブレットの周波数がずれているときは、それらをかけ合わせると正負の値が得られ、積分値はほとんどゼロ(0)になるので、「信号とウェーブレット $\psi_\ell(t)$ は、ほとんど似ていない(無相関)」ということがわかる。

ウェーブレット変換の種類

さて、ウェーブレット変換は、2 種類に大別される(図 16.6)。

● 連続ウェーブレット変換

連続ウェーブレット変換は、ウェーブレットの縮尺を連続的に変化させ、時間軸方向にも連続的にずらし(平行移動させて)、信号とウェーブレットの内積を計算する。その結果、連続ウェーブレット変換では、信号を連続的に細かく分析するため、次に解説する離散ウェーブレット変換に比べて、計算時間が長くなる。