やり直しのための通信数学

第17回 ウェーブレット変換のまとめ(その2)
――スケーリング関数，マザー・ウェーブレットと多重解像度解析

三谷 政昭

前回は，ウェーブレット変換のもつ物理的な意味と数式表現の関係を中心に，基本原理と時間周波数同時解析の考え方を取り上げて解説した．

今回は，スケーリング関数とマザー・ウェーブレットの一般化を行ったあと，ウェーブレット変換の多重解像度解析における基本原理の分解/再合成アルゴリズムを取り上げ，全体的な処理概要について説明する．（筆者）

スケーリング関数とマザー・ウェーブレットの関係

まず，前回(2007年5月号「ウェーブレット変換のまとめ(その1)」)の説明で，スケーリング関数$\varphi(t)$とマザー・ウェーブレット$\psi(t)$が，整数nに対して，

$$\varphi(t)=\cdots+p_{n-1}\varphi(2t-(n-1))+p_n\varphi(2t-n)+p_{n+1}\varphi(2t-(n+1))+\cdots \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\psi(t)=\cdots+q_{n-1}\varphi(2t-(n-1))+q_n\varphi(2t-n)+q_{n+1}\varphi(2t-(n+1))+\cdots \quad \cdots\cdots(2)$$

で表される再帰的な関係を思い起こしてもらいたい(**図17.1**)．

式(1)は，スケーリング関数どうしの関係である．つまり，スケーリング関数$\varphi(2t)$を時間シフト(平行移動)したものに重み係数p_nをかけ合せて合成すると，時間軸方向に2倍に拡大した，低周波数成分を解析するためのスケーリング関数$\varphi(t)$が得られることを意味する．

また，式(2)は，スケーリング関数$\varphi(2t)$を時間シフトしたものに重み係数q_nをかけ合せて合成すると，時間軸方向に2倍に拡大した，ひとまわり大きくて，高周波数成分を解析するウェーブレット$\psi(t)$が得られることを表す．

そして式(1)と式(2)における重み係数p_nとq_nはツースケール数列(two - scale sequence)と呼ばれ，

$$q_n=(-1)^n p_{1-n} \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\sum_n p_n=2 \quad \cdots\cdots(4)$$

の関係が成立する．また，式(1)と式(2)はツースケール関係という．

スケーリング関数の導出

それでは，スケーリング関数を導出するプロセスについて，具体的計算例を示そう．いま，ツースケール数列p_nについて，

$$\begin{cases} p_n\neq 0\,;\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3 \\ p_n=0\,;\ n<0,\ \ 3<n \end{cases} \quad \cdots\cdots(5)$$

とし，$0\leqq n\leqq 3$においてゼロでない値を採るものとする．このとき，式(3)に基づき，式(5)を考慮すれば，

$$\begin{cases} q_n\neq 0\,;\ n=-2,\ -1,\ 0,\ 1 \\ q_n=0\,;\ n<-2,\ 1<n \end{cases} \quad \cdots\cdots(6)$$

であることがわかる．

よって，式(1)と式(2)のツースケール関係は，

$$\varphi(t)=p_0\varphi(2t)+p_1\varphi(2t-1)+p_2\varphi(2t-2)+p_3\varphi(2t-3) \quad \cdots\cdots(7)$$

$$\psi(t)=q_{-2}\varphi(2t+2)+q_{-1}\varphi(2t+1)+q_0\varphi(2t)+q_1\varphi(2t-1) \quad \cdots\cdots(8)$$

と表される．

このとき，スケーリング関数$\varphi(t)$は，

$$\begin{cases} \varphi(t)\neq 0\,;\ 0<t<3 \\ \varphi(t)=0\,;\ t\leqq 0,\ 3\leqq t \end{cases} \quad \cdots\cdots(9)$$

で，$0<t<3$でゼロでない値を有することになって，ゼロでない領域が有限区間に限られることになる．

そうすると，式(9)より，

$$\varphi(0)=\varphi(3)=0 \quad \cdots\cdots(10)$$

であり，

$$\varphi(1)+\varphi(2)=1 \quad \cdots\cdots(11)$$

の規格化条件を考える．

次に，式(7)にt=1，2を代入し，式(9)の性質を適用することにより，

$$\varphi(1)=p_0\varphi(2)+p_1\varphi(1)+p_2\varphi(0)+p_3\varphi(-1)=p_0\varphi(2)+p_1\varphi(1) \quad \cdots(12)$$

$$\varphi(2)=p_0\varphi(4)+p_1\varphi(3)+p_2\varphi(2)+p_3\varphi(1)=p_2\varphi(2)+p_3\varphi(1) \quad \cdots(13)$$

となる関係が得られる．移項して整理すると，

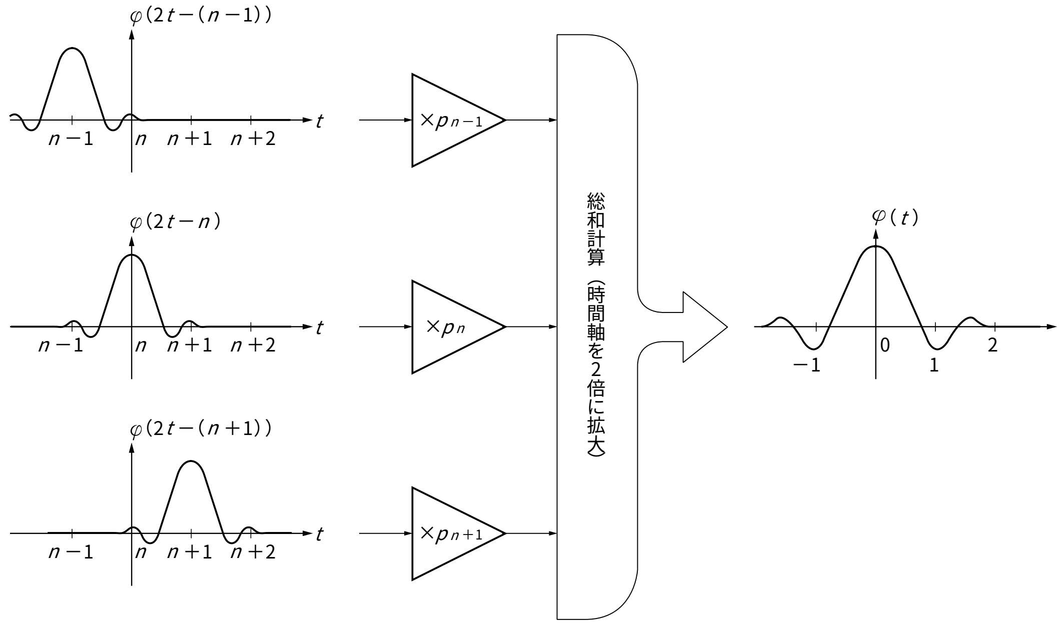
$$(p_1-1)\varphi(1)+p_0\varphi(2)=0 \quad \cdots\cdots(14)$$

$$p_3\varphi(1)+(p_2-1)\varphi(2)=0 \quad \cdots\cdots(15)$$

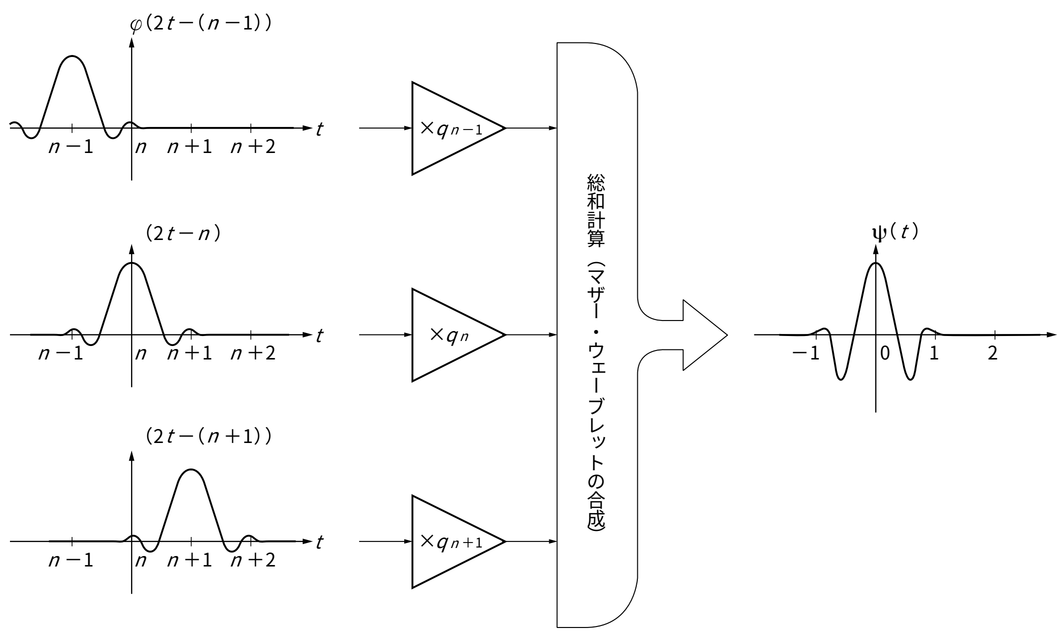
と変形され，

$$\begin{bmatrix} p_1-1 & p_0 \\ p_3 & p_2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(16)$$

KEYWORD ――スケーリング関数，マザー・ウェーブレット，ツースケール数列，イングリッド・ドーブシ，ドーブシ・ウェーブレット変換，多重解像度解析，分解アルゴリズム，再合成アルゴリズム



（a）スケーリング関数どうしの関係



（b）スケーリング関数とマザー・ウェーブレットの関係

図 17.1
ツースケール関数のイメージ

と行列として別表現でき，スケーリング関数$\varphi(t)$に関する方程式が導かれる．式(4)と式(11)を考慮して，式(16)を解く手順は専門書[1]に委ねるとして，一例を記す．

イングリッド・ドーブシ(Ingrid Daubechies)により導入されたスケーリング関数$\varphi(t)$の式(7)のツースケール数列p_nは，

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4},\ p_1 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4} \\ p_2 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4},\ p_3 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases} \quad \cdots\cdots(17)$$

である．よって，ドーブシ・ウェーブレット変換のスケーリング関数$\varphi(t)$は，式(12)より，

$$\begin{aligned}\varphi(t) = &\frac{1+\sqrt{3}}{4}\varphi(2t) + \frac{3+\sqrt{3}}{4}\varphi(2t-1) \\ &+ \frac{3-\sqrt{3}}{4}\varphi(2t-2) + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\varphi(2t-3)\end{aligned} \quad \cdots\cdots(18)$$

と表される．

以上のスケーリング関数$\varphi(t)$の導出過程を一般化すると，次のようになる．