やり直しのための通信数学

第18回 ウェーブレット変換のまとめ（その3）
——多重解像度解析におけるウェーブレット分解/合成アルゴリズム

三谷 政昭

前回は，ウェーブレット変換の最大の特徴である“多重解像度解析”における基本原理の分解/合成アルゴリズムを取り上げて，全体的な処理の概要を解説した．今回は，多重解像度解析とウェーブレット，スケーリング関数の関係を中心に説明する．続いて，フィルタ・バンク構成の基礎をなすウェーブレット分解/合成のアルゴリズムを導き，行列による表現との対応づけを行う．（筆者）

ツースケール数列と信号表現

まず，スケーリング関数$\varphi(t)$とマザー・ウェーブレット $\psi(t)$ が，整数nに対して，

$$\varphi(t)=\cdots+p_{n-1}\varphi(2t-(n-1))+p_n\varphi(2t-n)+p_{n+}\varphi(2t-(n+1))+\cdots \quad \cdots(1)$$

$$\psi(t)=\cdots+q_{n-1}\varphi(2t-(n-1))+q_n\varphi(2t-n)+q_{n+1}\varphi(2t-(n+1))+\cdots \quad \cdots(2)$$

とツースケール数列p_nとq_nにより表される．

いま，簡単なツースケール関係を，

$$\varphi(t)=p_0\varphi(2t)+p_1\varphi(2t-1) \quad \cdots(3)$$

$$\psi(t)=q_0\varphi(2t)+q_1\varphi(2t-1) \quad \cdots(4)$$

とし，信号$s(t)$が前回［2007年6月号，pp.160-168の「第17回ウェーブレット変換のまとめ（その2）」］で説明した補間係数w_0，w_1を用いて，信号波形$s(t)$が，

$$s(t)=w_0\varphi(t)+w_1\varphi(t-1) \quad \cdots(5)$$

で与えられるとき，

$$s(t)=\tilde{w}_0\varphi\left(\frac{t}{2}\right)+\tilde{w}_1\psi\left(\frac{t}{2}-1\right) \quad \cdots(6)$$

と表すことを考えてみよう．なお，$\tilde{w}_0$，$\tilde{w}_1$ はそれぞれ補間係数，ウェーブレット係数に相当する．

さて，式(3)と式(4)の変数tに$\frac{t}{2}$を代入すると，

$$\varphi\left(\frac{t}{2}\right)=p_0\varphi(t)+p_1\varphi(t-1) \quad \cdots(7)$$

$$\psi\left(\frac{t}{2}\right)=q_0\varphi(t)+q_1\varphi(t-1) \quad \cdots(8)$$

という関係が得られるので，式(6)に代入して，

$$\begin{aligned}s(t)&=\tilde{w}_0\{p_0\varphi(t)+p_1\varphi(t-1)\}+\tilde{w}_1\{q_0\varphi(t)+q_1\varphi(t-1)\}\\&=(p_0\tilde{w}_0+q_0\tilde{w}_1)\varphi(t)+(p_1\tilde{w}_0+q_1\tilde{w}_1)\varphi(t-1) \quad \cdots(9)\end{aligned}$$

となる．式(5)と等値することにより，

$$\begin{cases}w_0=p_0\tilde{w}_0+q_0\tilde{w}_1 & \cdots(10)\\ w_1=p_1\tilde{w}_0+q_1\tilde{w}_1 & \cdots(11)\end{cases}$$

という関係，すなわちウェーブレット合成の基本式が導かれる．なお，式(10)と式(11)の関係を行列で表すと，

$$\begin{pmatrix}w_0\\w_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_0 & q_0\\p_1 & q_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{w}_0\\\tilde{w}_1\end{pmatrix} \quad \cdots(12)$$

となる．

逆に，式(10)と式(11)を$\tilde{w}_0$と$\tilde{w}_1$について解いてみる．式(10)と式(11)の両辺に，それぞれp_0，p_1を乗じて，

$$\begin{cases}p_0w_0=p_0{}^2\tilde{w}_0+p_0q_0\tilde{w}_1\\ p_1w_1=p_1{}^2\tilde{w}_0+p_1q_1\tilde{w}_1\end{cases}$$

となり，さらに両辺を加え合わせて，

$$p_0w_0+p_1w_1=(p_0{}^2+p_1{}^2)\tilde{w}_0+(p_0q_0+p_1q_1)\tilde{w}_1$$

の関係が成立する．このとき，ツースケール数列には，

$$\begin{cases}q_0=p_1\\ q_1=-p_0\end{cases}$$

で表される関係があることから，

$$p_0q_0+p_1q_1=p_0p_1-p_1p_0=0$$

となるので，

$$\tilde{w}_0=\frac{p_0w_0+p_1w_1}{p_0{}^2+p_1{}^2} \quad \cdots(13)$$

と算出できる．また，式(10)と式(11)の両辺に，それぞれq_0，q_1を乗じて，同じように計算すれば，

$$\tilde{w}_1=\frac{q_0w_0+q_1w_1}{q_0{}^2+q_1{}^2} \quad \cdots(14)$$

と求められる．よって，

$$\begin{cases}\dfrac{p_0}{p_0{}^2+p_1{}^2}=\tilde{p}_0\\ \dfrac{p_1}{p_0{}^2+p_1{}^2}=\tilde{p}_1\end{cases} \quad \cdots(15)$$

KEYWORD——ツースケール数列，補間係数，ウェーブレット係数，ウェーブレット分解，行列表現，ハール・ウェーブレット変換，多重解像度解析

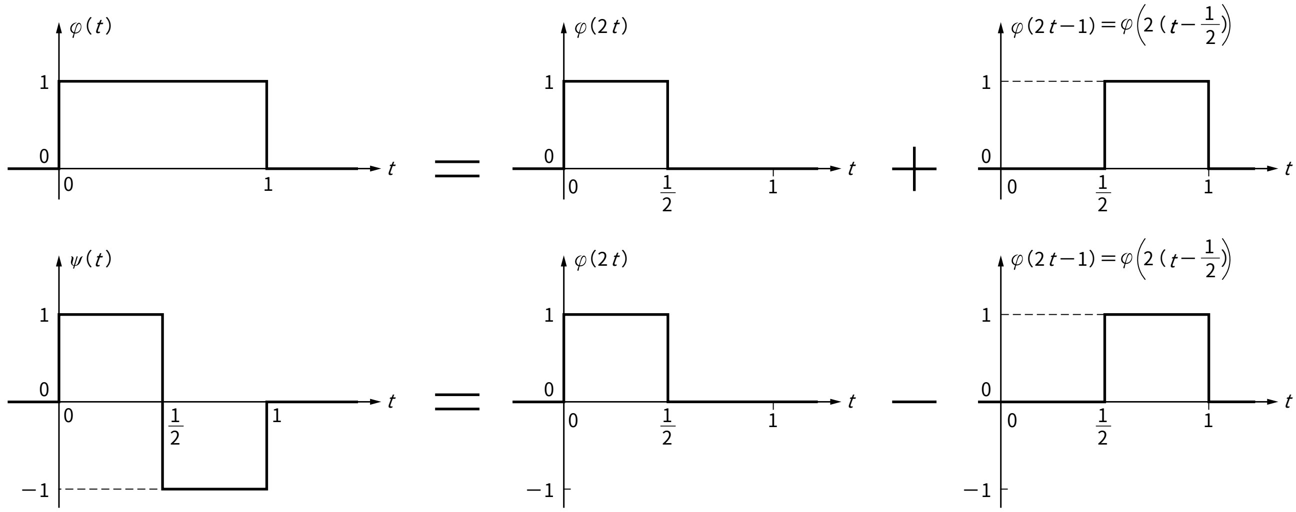

図 18.1　ツースケール関係（ハール・ウェーブレット変換，$p_0=p_1=1$，$q_0=1$，$q_1=-1$ の場合）

$$\begin{cases} \dfrac{q_0}{{q_0}^2+{q_1}^2}=\tilde{q}_0 \\ \dfrac{q_1}{{q_0}^2+{q_1}^2}=\tilde{q}_1 \end{cases} \qquad (16)$$

と置くことにより，ウェーブレット分解の基本式として，

$$\begin{cases} \tilde{w}_0=\tilde{p}_0 w_0+\tilde{p}_1 w_1 & (17) \\ \tilde{w}_1=\tilde{q}_0 w_0+\tilde{q}_1 w_1 & (18) \end{cases}$$

が得られる．ここで，式(17)と式(18)の関係を行列で表すと，

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}_0 \\ \tilde{w}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \tilde{p}_0 & \tilde{p}_1 \\ \tilde{q}_0 & \tilde{q}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

となる．

たとえば，ツースケール数列を，

$$\begin{cases} p_0=p_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ q_0=p_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ ,\quad q_1=-p_0=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad (20)$$

としたとき，式(15)と式(16)より，

$$\begin{cases} \tilde{p}_0=\tilde{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \tilde{q}_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ ,\quad \tilde{q}_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad (21)$$

であり，式(3)と式(4)のツースケール関係は，

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2t)+\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2t-1) \qquad (22)$$

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2t)-\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2t-1) \qquad (23)$$

と表される．なお，ハール・ウェーブレット変換におけるツースケール関係を**図 18.1** に示す．

また，信号のウェーブレット分解の基本式は，式(13)～(18)，および式(20)より，

$$\begin{cases} \tilde{w}_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}w_0+\dfrac{1}{\sqrt{2}}w_1 & (24) \\ \tilde{w}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}w_0-\dfrac{1}{\sqrt{2}}w_1 & (25) \end{cases}$$

となる．

一方，ウェーブレット合成の基本式は，式(10)と式(11)，および式(20)より，

$$\begin{cases} w_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tilde{w}_0+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tilde{w}_1 & (26) \\ w_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tilde{w}_0-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tilde{w}_1 & (27) \end{cases}$$

で与えられる．

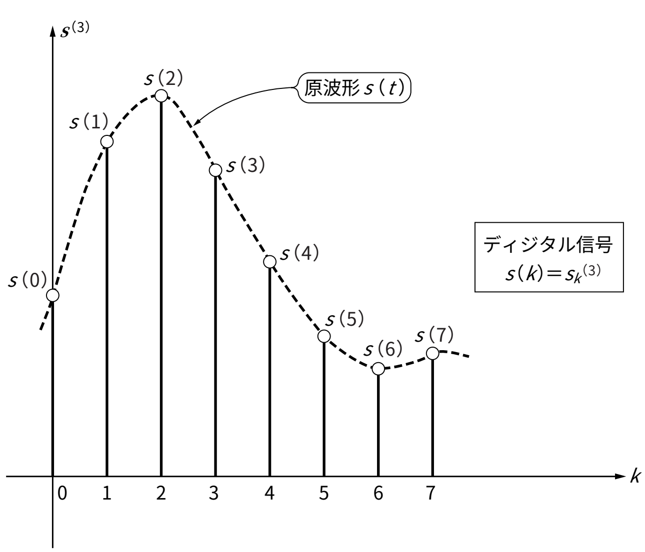

図 18.2　原波形とディジタル信号（L=3 で，$N=2^L$=8 サンプルの例）