

やり直しのための通信数学

第19回
最終回

ウェーブレット変換のまとめ (その4)

三谷 政昭

直交ウェーブレット変換とマルチレート信号処理

今回は、ウェーブレット変換の最大の特徴である“多重解像度解析”における基本原理の分解/合成アルゴリズムを取り上げた。また、全体的な処理の概要を説明した。今回は、直交ウェーブレット、サブバンド・フィルタによる信号分解および信号合成システムとマルチレート処理（ダウン・サンプリング、アップ・サンプリング）を取り上げて説明し、全19回にわたるウェーブレット変換の解説を締めくくりたい。（筆者）

直交ウェーブレット変換

まず、スケーリング関数 $\phi(t)$ とマザー・ウェーブレット $\psi(t)$ に対して、ツースケール関係を、

$$\phi(t) = p_0\phi(2t) + p_1\phi(2t-1) + p_2\phi(2t-2) + p_3\phi(2t-3) \quad \cdots (1)$$

$$\psi(t) = q_0\phi(2t) + q_1\phi(2t-1) + q_2\phi(2t-2) + q_3\phi(2t-3) \quad \cdots (2)$$

とし、補間係数 w_0, w_1, w_2, w_3 を用いて、信号波形 $s(t)$ が、

$$s(t) = w_0\phi(t) + w_1\phi(t-1) + w_2\phi(t-2) + w_3\phi(t-3) \quad \cdots (3)$$

で与えられるとき、

$$\begin{aligned} s(t) &= \tilde{w}_0\phi\left(\frac{t}{2}\right) + C_0\psi\left(\frac{t}{2}\right) \\ &\quad + \tilde{w}_1\phi\left(\frac{t}{2}-1\right) + C_1\psi\left(\frac{t}{2}-1\right) \quad \cdots (4) \end{aligned}$$

と表すことを考えてみよう (図 19.1)。なお、 $\tilde{w}_0$ と $\tilde{w}_1$ は補間係数、 C_0 と C_1 はウェーブレット係数に相当する。

次に、式 (1) と式 (2) の変数 t に $t/2$ 、 $(t/2)-1$ を代入すると、

$$\begin{cases} \phi\left(\frac{t}{2}\right) = p_0\phi(t) + p_1\phi(t-1) + p_2\phi(t-2) + p_3\phi(t-3) \\ \psi\left(\frac{t}{2}\right) = q_0\phi(t) + q_1\phi(t-1) + q_2\phi(t-2) + q_3\phi(t-3) \\ \phi\left(\frac{t}{2}-1\right) = p_0\phi(t-2) + p_1\phi(t-3) + p_2\phi(t-4) + p_3\phi(t-5) \\ \psi\left(\frac{t}{2}-1\right) = q_0\phi(t-2) + q_1\phi(t-3) + q_2\phi(t-4) + q_3\phi(t-5) \end{cases} \quad \cdots (5)$$

となる関係が得られるので、式 (4) に代入して、

$$\begin{aligned} s(t) &= \tilde{w}_0\left\{p_0\phi(t) + p_1\phi(t-1) + p_2\phi(t-2) + p_3\phi(t-3)\right\} \\ &\quad + C_0\left\{q_0\phi(t) + q_1\phi(t-1) + q_2\phi(t-2) + q_3\phi(t-3)\right\} \\ &\quad + \tilde{w}_1\left\{p_0\phi(t-2) + p_1\phi(t-3) + p_2\phi(t-4) + p_3\phi(t-5)\right\} \\ &\quad + C_1\left\{q_0\phi(t-2) + q_1\phi(t-3) + q_2\phi(t-4) + q_3\phi(t-5)\right\} \\ &= (p_0\tilde{w}_0 + q_0C_0)\phi(t) \\ &\quad + (p_1\tilde{w}_0 + q_1C_0)\phi(t-1) \\ &\quad + (p_2\tilde{w}_0 + q_2C_0 + p_0\tilde{w}_1 + q_0C_1)\phi(t-2) \\ &\quad + (p_3\tilde{w}_0 + q_3C_0 + p_1\tilde{w}_1 + q_1C_1)\phi(t-3) \\ &\quad + (p_2\tilde{w}_1 + q_2C_1)\phi(t-4) \\ &\quad + (p_3\tilde{w}_1 + q_3C_1)\phi(t-5) \quad \cdots (6) \end{aligned}$$

となる。ここで、信号データの循環シフト、すなわち、

$$\begin{cases} \phi(t-4) = \phi(t) \\ \phi(t-5) = \phi(t-1) \end{cases} \quad \cdots (7)$$

とみなして考えれば、式 (6) は、

$$\begin{aligned} s(t) &= (p_0\tilde{w}_0 + p_2\tilde{w}_1 + q_0C_0 + q_2C_1)\phi(t) \\ &\quad + (p_1\tilde{w}_0 + p_3\tilde{w}_1 + q_1C_0 + q_3C_1)\phi(t-1) \\ &\quad + (p_2\tilde{w}_0 + p_0\tilde{w}_1 + q_2C_0 + q_0C_1)\phi(t-2) \\ &\quad + (p_3\tilde{w}_0 + p_1\tilde{w}_1 + q_3C_0 + q_1C_1)\phi(t-3) \quad \cdots (8) \end{aligned}$$

と整理できる。そこで、式 (3) と等値することにより、

$$w_0 = p_0\tilde{w}_0 + p_2\tilde{w}_1 + q_0C_0 + q_2C_1 \quad \cdots (9)$$

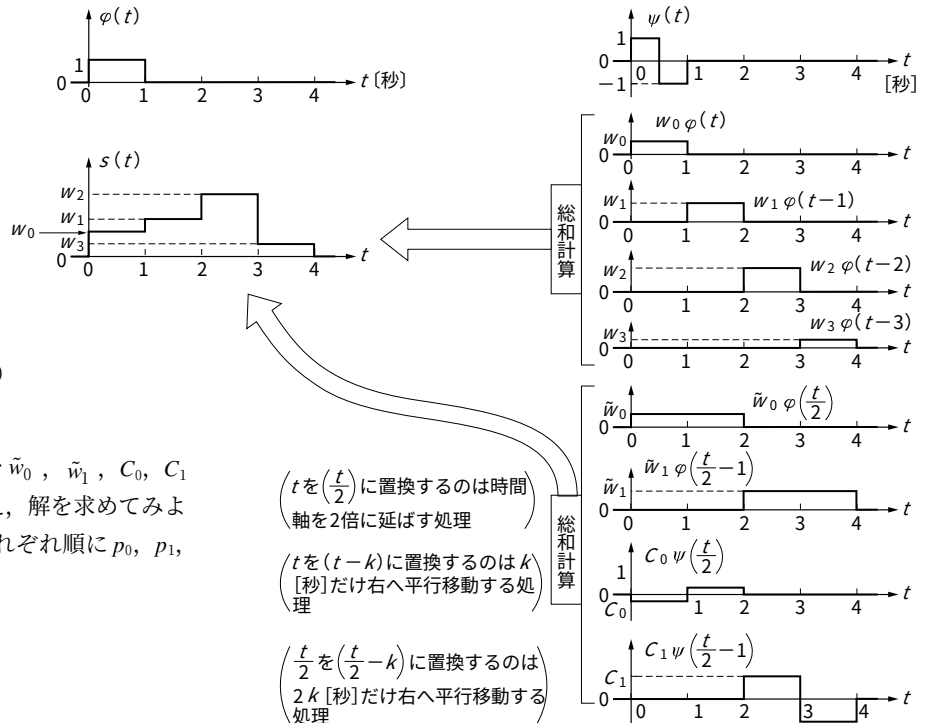
$$w_1 = p_1\tilde{w}_0 + p_3\tilde{w}_1 + q_1C_0 + q_3C_1 \quad \cdots (10)$$

$$w_2 = p_2\tilde{w}_0 + p_0\tilde{w}_1 + q_2C_0 + q_0C_1 \quad \cdots (11)$$

$$w_3 = p_3\tilde{w}_0 + p_1\tilde{w}_1 + q_3C_0 + q_1C_1 \quad \cdots (12)$$

という関係、すなわちウェーブレット逆変換（信号合成に相当）の基本式が導かれる。なお、式 (9)～式 (12) の関係を行列を用いて表すと、

▶ 図 19.1
スケール関数 $\varphi(t)$ とマザー・ウェーブ
レット $\psi(t)$ による信号表現例



$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & p_2 & q_0 & q_2 \\ p_1 & p_3 & q_1 & q_3 \\ p_2 & p_0 & q_2 & q_0 \\ p_3 & p_1 & q_3 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_0 \\ \tilde{w}_1 \\ C_0 \\ C_1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

となる。

逆に、式(9)～式(12)、あるいは式(13)を $\tilde{w}_0$, $\tilde{w}_1$, C_0 , C_1 の四つの未知変数に対する連立方程式と考え、解を求めてみよう。それには、式(9)～式(12)の両辺にそれぞれ順に p_0 , p_1 , p_2 , p_3 を乗じて、

$$\begin{cases} p_0 w_0 = p_0^2 \tilde{w}_0 + p_0 p_2 \tilde{w}_1 + p_0 q_0 C_0 + p_0 q_2 C_1 \\ p_1 w_1 = p_1^2 \tilde{w}_0 + p_1 p_3 \tilde{w}_1 + p_1 q_1 C_0 + p_1 q_3 C_1 \\ p_2 w_2 = p_2^2 \tilde{w}_0 + p_0 p_2 \tilde{w}_1 + p_2 q_2 C_0 + p_2 q_0 C_1 \\ p_3 w_3 = p_3^2 \tilde{w}_0 + p_3 p_1 \tilde{w}_1 + p_3 q_3 C_0 + p_3 q_1 C_1 \end{cases} \dots\dots\dots (14)$$

となり、続けて両辺を加え合わせれば、

$$\begin{aligned} p_0 w_0 + p_1 w_1 + p_2 w_2 + p_3 w_3 \\ = (p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \tilde{w}_0 \\ + 2(p_0 p_2 + p_1 p_3) \tilde{w}_1 \\ + (p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) C_0 \\ + (p_0 q_2 + p_1 q_3 + p_2 q_0 + p_3 q_1) C_1 \end{aligned} \dots\dots\dots (15)$$

の関係が得られる。このとき、ツースケール数列 $\{p_k\}_{k=0}^{k=3}$ と $\{q_k\}_{k=0}^{k=3}$ の間には、

$$\begin{cases} q_0 = p_3, q_1 = -p_2 \\ q_2 = p_1, q_3 = -p_0 \end{cases} \dots\dots\dots (16)$$

で表される関係が成立し、さらに、直交条件として、

$$p_0 p_2 + p_1 p_3 = 0 \dots\dots\dots (17)$$

となるように決定され、直交ウェーブレット変換と呼ばれる。

よって、式(16)の関係を利用すると、

$$\begin{aligned} p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \\ = p_0 p_3 - p_1 p_2 + p_2 p_1 - p_3 p_0 = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (18)$$

$$\begin{aligned} p_0 q_2 + p_1 q_3 + p_2 q_0 + p_3 q_1 \\ = p_0 p_1 - p_0 p_1 + p_2 p_3 - p_3 p_2 = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (19)$$

となるので、式(17)とともに式(15)に代入することにより、

$$\tilde{w}_0 = \frac{p_0 w_0 + p_1 w_1 + p_2 w_2 + p_3 w_3}{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \dots\dots\dots (20)$$

と算出できる。

また、式(9)～式(12)の両辺に、それぞれ順に q_0 , q_1 , q_2 , q_3 を乗じて、同じように計算すれば、

$$C_0 = \frac{q_0 w_0 + q_1 w_1 + q_2 w_2 + q_3 w_3}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \dots\dots\dots (21)$$

と求められる。残りの未知変数 $\tilde{w}_1$ と C_1 も同じように、

$$\tilde{w}_1 = \frac{p_2 w_0 + p_3 w_1 + p_0 w_2 + p_1 w_3}{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \dots\dots\dots (22)$$

$$C_1 = \frac{q_2 w_0 + q_3 w_1 + q_0 w_2 + q_1 w_3}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \dots\dots\dots (23)$$

と求められる【例題1】。

例題1

式(22)と式(23)の正当性を検証せよ。

解答1

式(22)については、式(9)～式(12)の両辺に、それぞれ順に

p_2 , p_3 , p_0 , p_1 を乗じて、

$$\begin{cases} p_2 w_0 = p_2 p_0 \tilde{w}_0 + p_2^2 \tilde{w}_1 + p_2 q_0 C_0 + p_2 q_2 C_1 \\ p_3 w_1 = p_3 p_1 \tilde{w}_0 + p_3^2 \tilde{w}_1 + p_3 q_1 C_0 + p_3 q_3 C_1 \\ p_0 w_2 = p_0 p_2 \tilde{w}_0 + p_0^2 \tilde{w}_1 + p_0 q_2 C_0 + p_0 q_0 C_1 \\ p_1 w_3 = p_1 p_3 \tilde{w}_0 + p_1^2 \tilde{w}_1 + p_1 q_3 C_0 + p_1 q_1 C_1 \end{cases} \dots\dots\dots (24)$$

となり、さらに両辺を加え合わせれば、

$$\begin{aligned} p_2 w_0 + p_3 w_1 + p_0 w_2 + p_1 w_3 \\ = 2(p_0 p_2 + p_1 p_3) \tilde{w}_0 \\ + (p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \tilde{w}_1 \\ + (p_0 q_2 + p_1 q_3 + p_2 q_0 + p_3 q_1) C_0 \\ + (p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) C_1 \end{aligned} \dots\dots\dots (25)$$